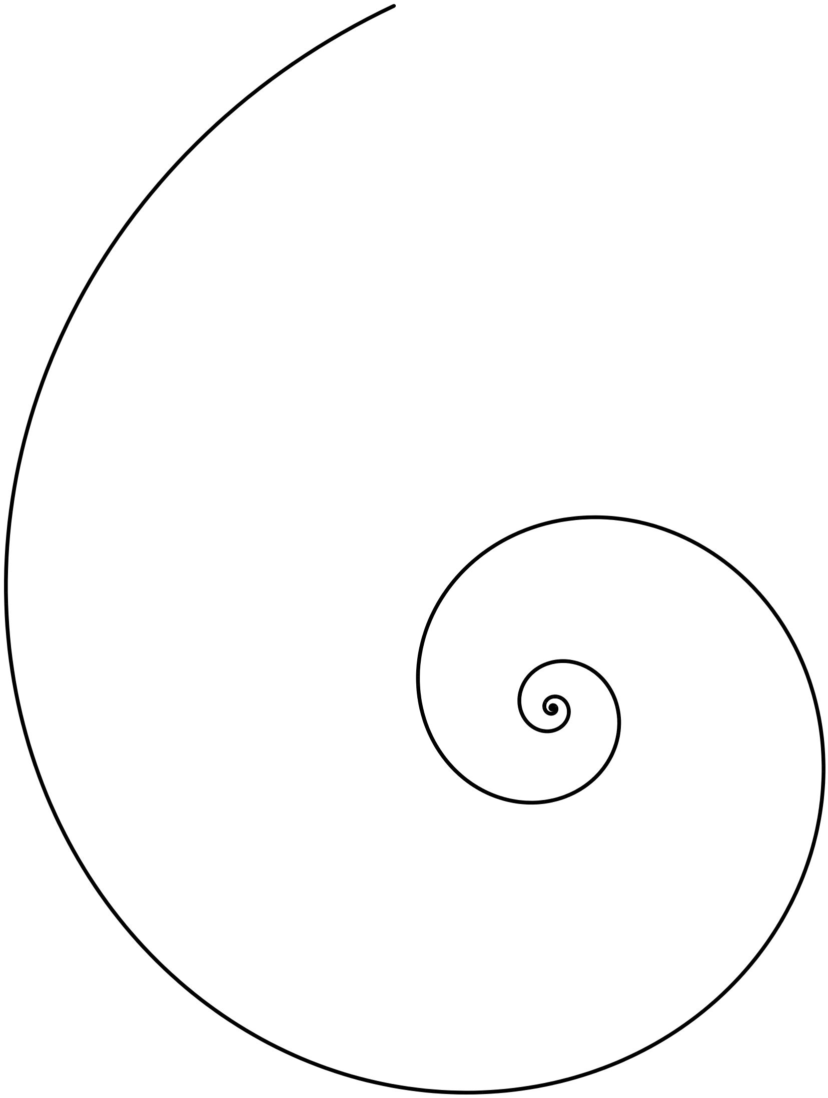


Wolfgang Süß

Werden

ISBN 9-783-752854961

1. Auflage

www.number-phi.net

Grafik, Satz, Lektorat: Wolfgang Süß
Herstellung und Verlag: BoD – Books on Demand, Norderstedt – www.bod.de

Gewidmet

allem Irrationalen

Inhalt

Vorwort

Vor Jahren habe ich einmal irgendwo gelesen (ich erinnere mich nicht mehr, wo), dass das Interesse an einem Buch mit jeder mathematischen Formel, die es enthält, um 50 % sinkt. Da dieses Buch mehrere Hundert Formeln enthält (den genauen Wert kenne ich nicht, ich habe sie nicht gezählt), dürfte das Interesse an diesem Buch also sehr nahe bei null liegen. Nehmen wir an, dieses Buch enthält 250 Formeln (tatsächlich sind es bestimmt mehr), dann liegt das Interesse (ausgehend von einem Standardwert von 1) bei

$$\frac{1}{2^{250}} = 2^{-250} \approx 5{,}5 \cdot 10^{-76}$$

Wenn du, liebe Leserin, lieber Leser, verstehst, wie ich zu dieser Formel komme, hast du bereits mehr als ausreichendes Grundwissen, um den mathematischen Teil dieses gesamten Buches zu verstehen. Verstehst du es nicht, ist es zunächst nicht weiter schlimm – ich ermuntere dich in diesem Fall dazu, es trotzdem zu versuchen. Mehr als einen Hauptschulabschluss brauchst du nicht, um fast alles verstehen zu können. Und höhere Mathematik kommt in diesem Buch nicht vor.

Solltest du Mathematiker sein, dann gehörst du nicht zur Zielgruppe meiner Leser. In diesem Fall kannst du das Buch einfach weglegen oder deinem Gärtner schenken. Denn in diesem Buch beginnt kein einziger Satz mit dem Wort »Sei« und auch Begriffe wie »Korollar«, »Lemma« oder »Deduktion« finden keinerlei Verwendung. Es ist also ein zutiefst unwissenschaftliches Buch. Und im Übrigen dreht sich alles nur um eine einzige Zahl. Immer wieder um eine einzige Zahl. Langweilig!

Solltest du jetzt immer noch nicht abgeschreckt sein, dann wünsche ich dir viel Spaß beim Tanz um die Goldene Zahl!

Wolfgang Süß

Werden

Nimm etwas und gib etwas Anderes dazu. Das Ergebnis ist etwas Neues.
Das machst du mit dem Anderen und dem Neuen wieder. Beliebig oft.

|» Das ist das ganze Gesetz des Entstehens, des Werdens.

Ich werde dir das anhand von Zahlen zeigen.

Nimm eine x-beliebige Zahl und gib eine andere beliebige Zahl dazu, das heißt, zähle sie zusammen.

«| Gut, ich nehme 37,42 und gebe 12 dazu. Das Ergebnis ist 49,42.

|» Dann mache das wie oben beschrieben wieder: Gib zur letzten Zahl das Ergebnis dazu:

$$12 + 49{,}42 = 61{,}42$$

«| Wie oft soll ich das machen? Ich mach's einfach ein paarmal ... also:

$$\begin{array}{rrr}
49{,}42\ + & 61{,}42\ = & 110{,}84 \\
61{,}42\ + & 110{,}84\ = & 172{,}26 \\
110{,}84\ + & 172{,}26\ = & 283{,}10 \\
172{,}26\ + & 283{,}10\ = & 455{,}36 \\
283{,}10\ + & 455{,}36\ = & 738{,}46 \\
455{,}36\ + & 738{,}46\ = & 1193{,}82 \\
738{,}46\ + & 1193{,}82\ = & 1932{,}28 \\
1193{,}82\ + & 1932{,}28\ = & 3126{,}10 \\
1932{,}28\ + & 3126{,}10\ = & 5058{,}38 \\
3126{,}10\ + & 5058{,}38\ = & 8184{,}48
\end{array}$$

«| So, ich hab das jetzt 10-mal gemacht, das muss reichen. Und wozu soll das gut gewesen sein?

|» Ich möchte, dass du dir anschaust, um welchen Faktor das Ergebnis jeweils wächst.

«| Um welchen Faktor das Ergebnis wächst? Wie meinst du das?

|» Der Faktor ist der Betrag, mit dem du das vorletzte Ergebnis multiplizieren musst, um das letzte Ergebnis zu erhalten. Wenn du also das letzte Ergebnis durch das vorhergehende dividierst, dann erhältst du den Faktor, um welchen das Ergebnis zuletzt angewachsen ist. Kompliziert ? Probier's einfach aus.

«| O. k., wenn du meinst ...

$$\frac{172{,}26}{110{,}84}=1{,}5541 \qquad \frac{283{,}10}{172{,}26}=1{,}6434 \qquad \frac{455{,}36}{283{,}10}=1{,}6085$$

$$\frac{738{,}46}{455{,}36}=1{,}6217 \qquad \frac{1193{,}82}{738{,}46}=1{,}6166 \qquad \frac{1932{,}28}{1193{,}82}=1{,}6186$$

$$\frac{3126{,}10}{1932{,}28}=1{,}6178 \qquad \frac{5058{,}38}{3126{,}10}=1{,}6181 \qquad \frac{8184{,}48}{5058{,}38}=1{,}6180$$

|» Fällt dir was auf?

«| Ja, der Faktor scheint sich bei etwa 1,618 einzupendeln.

|» Genau. Wenn du noch weiterrechnest, dann wirst du merken, dass sich der Faktor immer genauer bei 1,61803398875… einpendelt. Diese Zahl nennen die Mathematiker Φ (*Phi* – sprich: *Fi* – der 21. Buchstabe im griechischen Alphabet). Sie ist eine der beiden Lösungen der Gleichung $x^2-x-1=0$ und hat den Betrag

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803398875\ldots$$

«| Ich versteh das zwar nicht, aber ...

|» Das macht einstweilen nichts. Machen wir einen zweiten Versuch. Such dir bitte zwei andere Zahlen aus, irgendwelche »schrägen« Zahlen ...

«| Noch zwei?

|» Ja, wir wollen diese Rechenregel auch noch mit zwei ganz anderen Zahlen ausprobieren und uns das Ergebnis anschauen.

«| Ich nehme die Zahlen 1,37 und minus 329. Ich darf doch auch eine negative Zahl verwenden?

|» Natürlich, ich sagte ganz bewusst, *irgendwelche* Zahlen.

«| Da bin ich aber gespannt ...

$$
\begin{aligned}
(1{,}37) + (-329{,}00) &= -327{,}63 \\
(-329{,}00) + (-327{,}63) &= -656{,}63 \\
(-327{,}63) + (-656{,}63) &= -984{,}26 \\
(-656{,}63) + (-984{,}26) &= -1640{,}89 \\
(-984{,}26) + (-1640{,}89) &= -2625{,}15 \\
(-1640{,}89) + (-2625{,}15) &= -4266{,}04 \\
(-2625{,}15) + (-4266{,}04) &= -6891{,}19 \\
(-4266{,}04) + (-6891{,}19) &= -11157{,}23 \\
(-6891{,}19) + (-11157{,}23) &= -18048{,}42 \\
(-11157{,}23) + (-18048{,}42) &= -29205{,}65 \\
(-18048{,}42) + (-29205{,}65) &= -47254{,}07
\end{aligned}
$$

Genügt das? Es kommt jetzt etwas ganz Anderes heraus. Das sind lauter negative Zahlen!

|» Macht nichts, rechne bitte trotzdem die jeweiligen Faktoren bei den Ergebnissen aus.

«| O. k.

$$\frac{-656{,}63}{-327{,}63}=2{,}0042 \qquad \frac{-984{,}26}{-656{,}63}=1{,}4990 \qquad \frac{-1640{,}89}{-984{,}26}=1{,}6671$$

$$\frac{-2625{,}15}{-1640{,}89}=1{,}5998 \qquad \frac{-4266{,}04}{-2625{,}15}=1{,}6251 \qquad \frac{-6891{,}19}{-4266{,}04}=1{,}6154$$

$$\frac{-11157{,}23}{-6891{,}19}=1{,}6191 \qquad \frac{-18048{,}42}{-11157{,}23}=1{,}6176 \qquad \frac{-29205{,}65}{-18048{,}42}=1{,}6182$$

$$\frac{-47254{,}07}{-29205{,}65}=1{,}6180$$

Aha! Das scheint tatsächlich wieder auf das gleiche Ergebnis hinauszulaufen ... ist das bei *allen* Zahlen so?

|» Ja, das ist bei *allen* Zahlen so. Es ist wirklich vollkommen egal, welche Zahlen du verwendest, das Ergebnis nähert sich immer der Zahl $\Phi = 1{,}61803398875\ldots$ Es funktioniert sogar dann, wenn eine der beiden Zahlen NULL ist.

«| Bei NULL? Das glaub ich nicht.

|» Probier's aus!

«| O. k., ich nehme 7 und 0.

$$\begin{aligned} 7 + 0 &= 7 \\ 0 + 7 &= 7 \\ 7 + 7 &= 14 \\ 7 + 14 &= 21 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ja, ja ich hab's kapiert, ich glaub's dir!

|» Prima. Du siehst also, dass diese »Wachstumsregel« immer zum gleichen Ergebnis führt, egal von welcher Position du angefangen hast. Jetzt werde ich dir

ein paar Eigenschaften dieser sonderbaren Zahl Φ zeigen.

Der Kehrwehrt von Φ ist um genau 1 kleiner als Φ:

$$\frac{1}{1{,}618034}=0{,}618034$$

Und wenn du das Quadrat von Φ ausrechnest, dann wirst du feststellen, dass dieses um genau 1 größer ist als Φ:

$$1{,}618034^2=2{,}618034$$

Das ist schon mal ziemlich bemerkenswert. – So, jetzt werden wir uns diese Zahl noch etwas genauer anschauen. Kann man sie eigentlich exakt berechnen? Die Antwort ist Nein, denn sie gehört zur Gruppe der sogenannten *irrationalen Zahlen*[1] – so bezeichnen Mathematiker Zahlen, die durch keine Bruchzahl berechnet werden kann. Die Zahlen rechts vom Komma werden nie periodisch, d. h. du kannst nie vorhersagen, welches die nächste Zahl sein wird: 1,6180339887498 9484820458683436563811772030917980576286213544862270526046….

Probieren wir die »Wachstumsregel« doch einmal mit den Zahlen 1 und Φ aus:

$$\begin{array}{r}
1{,}0000000000000000000\ldots\\
1{,}6180339887498948482\,0\ldots\\
2{,}6180339887498948482\,0\ldots\\
4{,}2360679774997896964\,0\ldots\\
6{,}8541019662496845446\,1\ldots\\
11{,}0901699437494742410\,2\ldots\\
17{,}9442719099991587856\,3\ldots\\
29{,}0344418537486330266\,5\ldots\\
46{,}9787137637477918122\,9\ldots\\
76{,}0131556174964248389\,5\ldots\\
122{,}9918693812442166512\,5\ldots\\
199{,}0050249987406414902\,0\ldots
\end{array}$$

1 https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl

321,996894379984858141 46...
521,00191937872549963166...
842,99881375871035777312...
1364,00073313743585740479...
2206,99954689614621517792...
3571,00028003358207258272...
5777,99982692972828776065...
9349,00010696331036034337...
15126,99993389303864810402...
24476,00004085634900844740...
39602,99997474938765655143...
64079,00001560573666499884...
103681,99999035512432155028...
167761,00000596086098654912...
271442,99999631598530809940...
439204,00000227684629464853...
710646,99999859283160274794...
1149851,00000086967789739648...
1860497,99999946250950014442...
3010349,00000033218739754091...
4870846,99999979469689768534...
7881196,00000012688429522625...
12752042,99999992158119291159...
20633239,00000004846548813785...

Fällt dir etwas auf?

«| Ja, es entstehen rechts vom Komma immer mehr Nullen oder Neuner ... das scheint sich alles in Richtung ganzer Zahlen zu bewegen.

|» Genau, die Differenz zu einer ganzen Zahl wird immer kleiner. – So, und jetzt teilen wir diese Zahlen, die wir hier erhalten haben, in den Teil links vom Komma und den Teil rechts vom Komma auf und schauen uns das etwas näher an. Beginnen wir mit der 13. Zahl in der Reihe: 521,0019193787254996316 6 .

Links vom Komma steht 521, rechts davon $0{,}0019193787254996316$6. Auf den ersten Blick scheint das nichts Besonderes zu sein. Dieser Eindruck ändert sich jedoch schlagartig, wenn wir den Kehrwert des Nachkommateils bilden:

$$\frac{1}{0{,}00191937872549963166} = 521{,}0019193782549963$$

Was sagst du dazu?

«| Das ist wieder dieselbe Zahl wie vorher! Ist das Zufall?

|» Wäre es Zufall, dann wäre dieser *sehr* zufällig ... Probieren wir es auch noch mit einer anderen Zahl – z. B. mit der 18. Zahl: 5777,99982692972828776065

«| Mit dieser Zahl wird es nicht funktionieren, denn deren Nachkommateil ist nahe bei 1 ...!

|» Da hast du schon recht, aber schau dir bitte nochmal die Reihe mit den immer mehr werdenden Nullen und Neunern von vorhin an:

$$
\begin{array}{r}
1{,}0000000000000000000 \\
1{,}6180339887498948482 0 \\
2{,}6180339887498948482 0 \\
4{,}2360679774997896964 0 \\
6{,}8541019662496845446 1 \\
11{,}0901699437494742410 2 \\
17{,}9442719099991587856 3 \\
29{,}0344418537486330266 5 \\
46{,}9787137637477918122 9 \\
76{,}0131556174964248389 5 \\
122{,}9918693812442166512 5 \\
199{,}0050249987406414902 0 \\
321{,}9968943799848581414 6 \\
521{,}0019193787254996316 6 \\
842{,}9988137587103577731 2 \\
1364{,}0007331374358574047 9 \\
2206{,}9995468961462151779 2 \\
3571{,}0002800335820725827 2 \\
5777{,}9998269297282877606 5 \\
9349{,}0001069633103603433 7 \\
15126{,}9999338930386481040 2 \\
\vdots
\end{array}
$$

Wie du siehst, pendeln die Werte immer genauer um eine ganze Zahl. Immer schön abwechselnd einmal knapp darüber, dann knapp darunter. Wir müssen uns also mit der Differenz zur jeweiligen ganzen Zahl beschäftigen. Liegt der Wert knapp darüber, wie vorher bei 521,00191937872549963166, dann entspricht die Differenz genau dem Nachkommateil. Liegt er knapp darunter, wie bei 5777,99982692972828776065, dann ist die ganze Zahl 5778 und die Differenz des Nachkommateils zu dieser ganzen Zahl beträgt

$$5778 - 5777{,}99982692972828776065 = 0{,}00017307027171223935$$

Wir betrachten also den Kehrwert dieser Differenz:

$$\frac{1}{0{,}00017307027171223935} = 5777{,}99982692972828776065$$

Zufrieden?

«| Und wie!

|» Ja, das ist wirklich schön. Auch hier ist der Kehrwert des Nachkommateils wieder genau die ursprüngliche Zahl. – Jetzt zeige ich dir zwischendurch noch etwas, zu dem ein Mathematiker »Na logisch!« sagen würde. In unserer Reihe, die wir mit der Summe aus 1 und Φ begonnen haben, können wir die Ergebnisse auch dann erhalten, wenn wir stattdessen das jeweilige Ergebnis immer mit Φ multiplizieren. Wir haben ja ganz am Anfang (als wir die »Wachstumsregel« noch mit beliebigen Zahlen angewendet hatten) gesehen, dass wir bei immer öfterer Anwendung der Regel den immer genauer werdenden Faktor Φ erhalten. Wenden wir diese Regel auf die Zahl Φ selber an, dann muss von Anfang an der Faktor genau die Größe von Φ haben. Wie gesagt – Mathematiker-Logik! Also:

$$
\begin{aligned}
1{,}000000000000 \times 1{,}618033988750 &= 1{,}618033988750\\
1{,}618033988750 \times 1{,}618033988750 &= 2{,}618033988750\\
2{,}618033988750 \times 1{,}618033988750 &= 4{,}236067977500\\
4{,}236067977500 \times 1{,}618033988750 &= 6{,}854101966250\\
6{,}854101966250 \times 1{,}618033988750 &= 11{,}090169943749\\
11{,}090169943749 \times 1{,}618033988750 &= 17{,}944271909999\\
17{,}944271909999 \times 1{,}618033988750 &= 29{,}034441853749\\
29{,}034441853749 \times 1{,}618033988750 &= 46{,}978713763748\\
46{,}978713763748 \times 1{,}618033988750 &= 76{,}013155617496\\
76{,}013155617496 \times 1{,}618033988750 &= 122{,}991869381244\\
122{,}991869381244 \times 1{,}618033988750 &= 199{,}005024998740\\
199{,}005024998740 \times 1{,}618033988750 &= 321{,}996894379985\\
321{,}996894379985 \times 1{,}618033988750 &= 521{,}001919378725\\
521{,}001919378725 \times 1{,}618033988750 &= 842{,}998813758710\\
842{,}998813758710 \times 1{,}618033988750 &= 1364{,}000733137436\\
1364{,}000733137436 \times 1{,}618033988750 &= 2206{,}999546896146\\
2206{,}999546896146 \times 1{,}618033988750 &= 3571{,}000280033582\\
3571{,}000280033582 \times 1{,}618033988750 &= 5777{,}999826929728\\
5777{,}999826929728 \times 1{,}618033988750 &= 9349{,}000106963310\\
9349{,}000106963310 \times 1{,}618033988750 &= 15126{,}999933893039
\end{aligned}
$$

«| Ja, das leuchtet mir ein ... vorher haben wir uns erst an diese ominöse Zahl immer weiter herangepirscht, aber jetzt haben wir gleich damit angefangen und sind sozusagen schon von Anfang an dort. Du hast recht, das ist »logisch«!

Wenn ich mir die »großen« Zahlen anschaue, dann werden diese offensichtlich immer mehr zu »ganzen Zahlen«. Denn 5777,9998269 ist fast genau 5778 und ebenso ist 9349,0001069 fast genau 9349. Kann man diese Folge nicht gleich von vornherein mit ganzen Zahlen beginnen?

|» Klar kann man das. Probier bitte Folgendes: Geh diese Folge von den großen ganzen Zahlen zu immer kleineren ganzen Zahlen durch und beobachte, was passiert.

«| O. k., ich beginne also bei 15126,99993389 – die gerundete ganze Zahl ist 15127 – und gehe zurück zu 9349 usw.:

$$\begin{array}{r} 15127 \\ 9349 \\ 5778 \\ 3571 \\ \vdots \end{array}$$

Stimmt das so? Anstatt wie »von unten nach oben« immer die vorhergehende Zahl dazuzuzählen, ziehe ich jetzt »von oben nach unten« immer die letzte Zahl ab und schreibe das Ergebnis der Differenz hin.

|» Genau.

«| Gut, dann mache ich das jetzt weiter:

$$\begin{array}{r} \vdots \\ 2207 \\ 1364 \\ 843 \\ 521 \\ 322 \\ 199 \\ 123 \\ 76 \\ 47 \\ 29 \\ 18 \\ 11 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

|» Mach ruhig weiter!

«| Ich bin aber schon bei 1 angelangt!

|» Na und? Mach einfach weiter und schau, was passiert.

$$\begin{array}{r} \vdots \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \\ -11 \\ 18 \\ -29 \\ \vdots \end{array}$$

«| Das ist komisch. Die Zahlen werden wieder die gleichen, aber jetzt sind sie immer abwechselnd negativ und positiv! Hast du das gewusst?

|» Nicht, bevor ich es selber ausprobiert hatte. Ich war ebenfalls überrascht, als ich das gesehen hatte.

«| Ist das bei allen diesen Folgen so?

|» Diese Frage hatte ich mir auch gestellt, und da ich nicht sofort eine Antwort darauf fand, hab ich es einfach ausprobiert. Ich hab die mir bekannte Fibonacci-Folge genommen – die kennt man schon seit Jahrhunderten.

«| Aha. Und wie geht die?

|» Die beginnt mit 0 und 1.

«| Das probier ich gleich aus:

$$\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 21 \\ 34 \\ 55 \\ 89 \\ 144 \\ 233 \\ \vdots \end{array}$$

Kommt mir irgendwie bekannt vor ...

|» Kein Wunder, die steht in fast jedem Buch über Mathematik.

«| Aber wir wollten ja ausprobieren, ob die Folge nach »unten« auch wieder abwechselnd positive und negative Zahlen produziert ...

$$\begin{array}{r} \vdots \\ 8 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \\ -8 \\ 13 \\ -21 \\ \vdots \end{array}$$

Sie tut es! Es schaut genau so aus wie bei dieser anderen Folge. Die gleichen Zahlen wie »oben«, nur eben abwechselnd positiv und negativ. Ich glaub, das ist wirklich bei allen diesen Folgen so. – Aber eines möchte ich jetzt noch probieren. Ich will dieses Φ dabei verwenden!

|» Gute Idee! Tu das.

«| Ich nehme Φ auf 3 Stellen nach dem Komma genau, das sollte reichen – es erspart mir allzu vieles Rechnen.

$$
\begin{array}{r}
\vdots \\
6{,}854 \\
4{,}236 \\
2{,}618 \\
1{,}618 \\
\mathbf{1{,}000} \\
0{,}618 \\
0{,}382 \\
0{,}236 \\
0{,}146 \\
0{,}090 \\
0{,}056 \\
0{,}034 \\
0{,}020 \\
0{,}014 \\
\vdots
\end{array}
$$

Da wird nichts negativ! Und außerdem geht das gegen 0, die Zahlen werden ja immer kleiner. Bei den ganzen Zahlen sind sie wieder größer geworden. Dort sind die gleichen Zahlen wieder zu sehen gewesen, nur dass sie eben abwechselnd positiv und negativ waren.

|» Rechne noch ein bisschen weiter ...

«| Meinst du? Ich sehe doch bereits, dass das gegen 0 geht! Aber bitte ...

$$
\begin{array}{r}
\vdots \\
0{,}020 \\
0{,}014 \\
0{,}006 \\
0{,}008 \\
-0{,}002 \\
0{,}010 \\
-0{,}012 \\
0{,}024 \\
-0{,}036 \\
\vdots
\end{array}
$$

Ah! So ist das! Ich glaube, das hängt damit zusammen, weil ich Φ auf nur 3 Stellen nach dem Komma hingeschrieben habe. Und als ich dann in die Gegend gekommen bin, wo so viele Nullen nach dem Komma waren wie die Genauigkeit meiner Rechnung, da ist die Folge aus der Spur gekippt.

|» Gut beobachtet! Es ist tatsächlich so. Je genauer du die Zahl Φ berechnest, desto länger dauert es, bis sie »aus der Spur kippt«, wie du es genannt hast. Wenn du eine Folge mit ganzen Zahlen berechnest, dann ist die Genauigkeit sozusagen 0 Stellen nach dem Komma und sie kippt tatsächlich ab dem Wert 0 aus der Spur. Nach „oben“ gerechnet kann so etwas nicht passieren, denn dort wird der Wert automatisch mit jedem Schritt genauer. Es ist wie bei einem Radfahrer, der sich nach vorne bewegt. Am Anfang schiebt er ein wenig an, und bei einer Geschwindigkeit knapp über 0 wackelt er noch ziemlich stark, das heißt, er muss ständig das Gleichgewicht ausgleichen, er fährt mal ein wenig nach links, dann wieder nach rechts, bis er schneller wird, und je schneller er fährt (je weiter er sich in der Folge „nach oben“ bewegt), desto kleiner müssen diese Korrekturen nach links oder rechts werden. Wenn er stillsteht, fällt er um – er kippt aus der Spur.

Die Folge, die genau mit Φ beginnt, ist sozusagen die Ideallinie für den Radfahrer. Die »Natur« der 3-dimensionalen Welt kennt jedoch nur ganze Zahlen. Etwas unendlich Genaues gibt es nicht. Selbst Licht besteht letztlich aus einzelnen, ganzen Licht-Quanten, den Photonen. Auch ein Lichtstrahl bewegt sich entlang einer schnurgeraden Ideallinie, allerdings so genau, dass wir die Abweichung nicht messen können – sie ist unmessbar gering.

Wenn wir die Größe des Idealwertes (Φ) herausfinden wollen, dann bleibt uns nichts Anderes übrig, als möglichst »weit zu wandern«, das heißt möglichst viele Stufen dieser Folge zu ersteigen und dann diese großen Zahlen, die wir dort finden, zu dividieren. Natürlich können wir auch einfach den Wert von Φ mit der Formel

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

möglichst genau berechnen. Aber auch das geht nur mit einer beschränkten Genauigkeit – diese Zahl lässt sich eben nicht exakt berechnen.

Ich zeige dir jetzt noch etwas, das du noch nicht sehen konntest, weil du zuletzt die Zahl Φ nur auf 3 Stellen nach dem Komma genau genommen hast. Berechne die Folge noch einmal, aber jetzt mit einer hohen Genauigkeit von 20 Stellen nach dem Komma.

«| Gut, ich bin schon gespannt, was du mir damit zeigen willst.

⋮
1364,00073313743585739000
842,99881375871035776400
521,00191937872549962600
321,99689437998485813800
199,00502499874064148800
122,99186938124421665000
76,01315561749642483800
46,97871376374779181220
29,03444185374863302660
17,94427190999915878560
11,09016994374947424100
6,85410196624968454460
4,23606797749978969640
2,61803398874989484820
1,61803398874989484820
1,00000000000000000000
0,61803398874989484820
0,38196601125010515180
0,23606797749978969640
0,14589803375031545540
0,09016994374947424100
0,05572809000084121400
0,03444185374863302700
0,02128623625220818700
0,01315561749642484000
0,00813061875578334000
0,00502499874064150000
0,00310562001514184000
0,00191937872549974000
0,00118624128964210000
0,00073313743585764000
⋮

|» Siehst du es? Die Zahlen, die kleiner als 1 sind, sind wieder genau die gleichen wie »oben«, allerdings ohne den ganzzahligen Teil – man sieht das aber nur bei jeder zweiten Zahl. Es ist der gleiche Effekt wie bei der Differenz zu den ganzen Zahlen. Mal ist der Wert etwas darüber, mal etwas darunter. Und alle Zahlen, die kleiner als 1 sind, sind nichts anderes als der Kehrwert zu den jeweiligen »oberen« Zahlen. Dadurch, dass man das gleiche Ergebnis auch bekommt, wenn man nach »oben« jeweils mit Φ multipliziert, bekommt man das Ergebnis nach »unten«, indem man durch Φ dividiert.

Diese »Wachstumsformel« funktioniert also sowohl »von innen nach außen« als auch von »unten nach oben«. Es ist egal, ob man die Folge durch Addition gewinnt oder durch Multiplikation – sie ist identisch. Die Zahl ist »in sich selbst gespiegelt«. Sie wurde vor sehr langer Zeit auch *Goldene Zahl* genannt und ist heute unter dem Begriff *Goldener Schnitt* auch außerhalb der Mathematik bekannt.

Aus meiner Sicht ist das Bemerkenswerteste die Tatsache, dass sie nicht genau berechenbar ist, dass auch bei noch so genauer Berechnung immer ein winziger Rest bleibt, den man noch genauer berechnen könnte.

«| Kann man das irgendwie bildlich sichtbar machen?

|» Ja, das kann man. Nimm ein Rechteck mit den Seitenverhältnissen des Goldenen Schnitts, also eines, bei dem eine Seite 1 und die andere Seite $\Phi = 1{,}618034$ lang ist.

Das sieht so aus:

Bild 1

Anschließend zerschneidest du das Rechteck in einen Teil, der genau ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 ist, und den Rest.

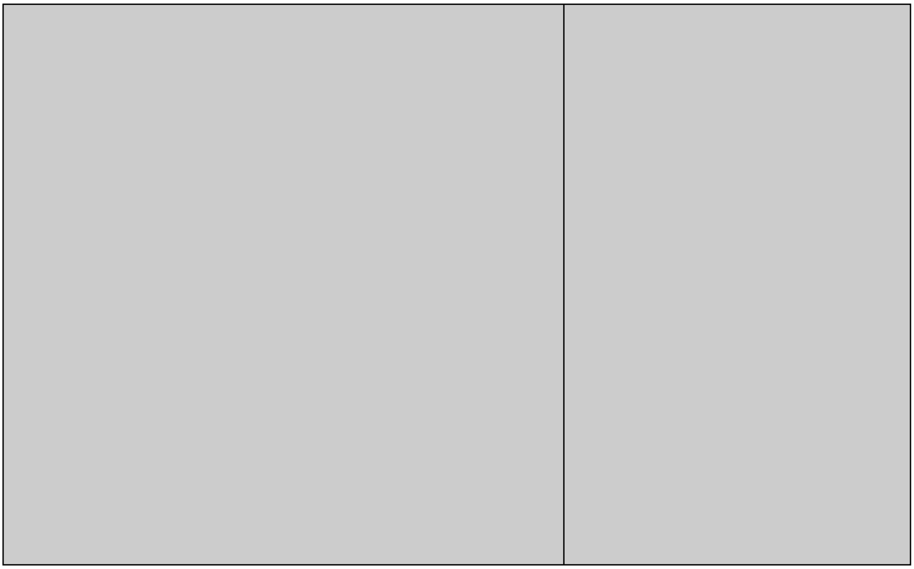


Bild 2

Der »Rest« ist nun ebenfalls ein Rechteck mit genau dem gleichen Seitenverhältnis, nur eben kleiner. Du kannst dieses Rest-Rechteck wiederum in zwei Teile zerschneiden, wobei ein Teil genau ein Quadrat ist.

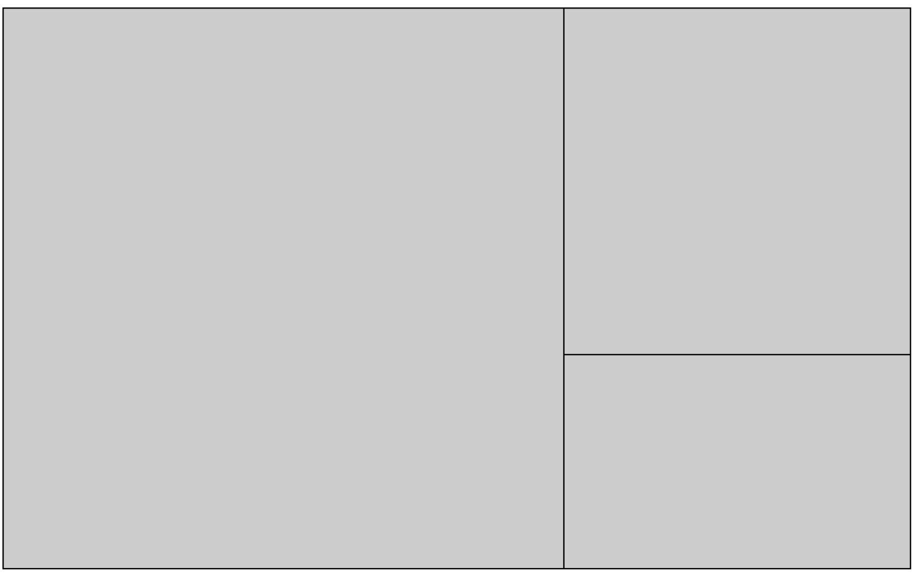


Bild 3

Wieder bleibt ein Rest übrig, ebenfalls mit einem Seitenverhältnis von $1 : \Phi$. Der neue Rest wird ebenso in ein Quadrat und dessen Rest geteilt.

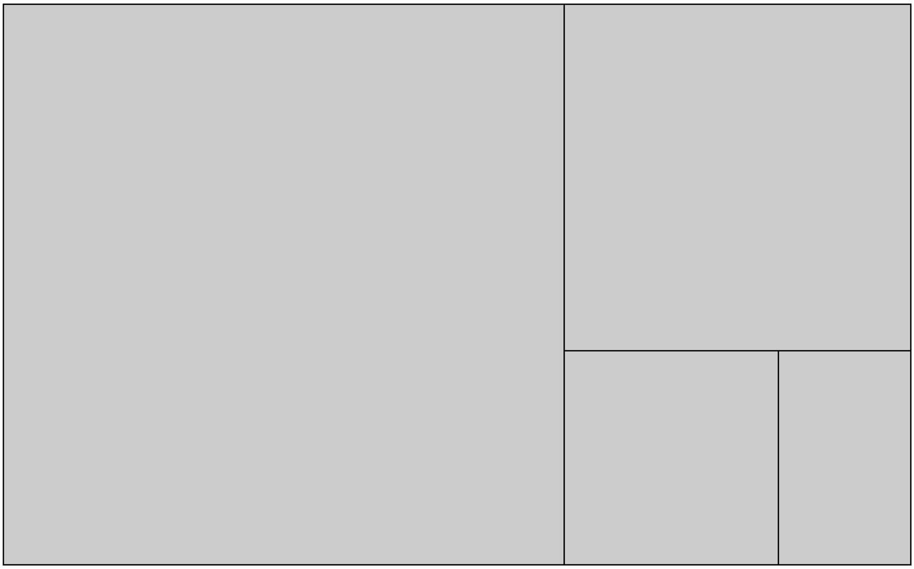


Bild 4

Du siehst, man kann das beliebig oft machen:

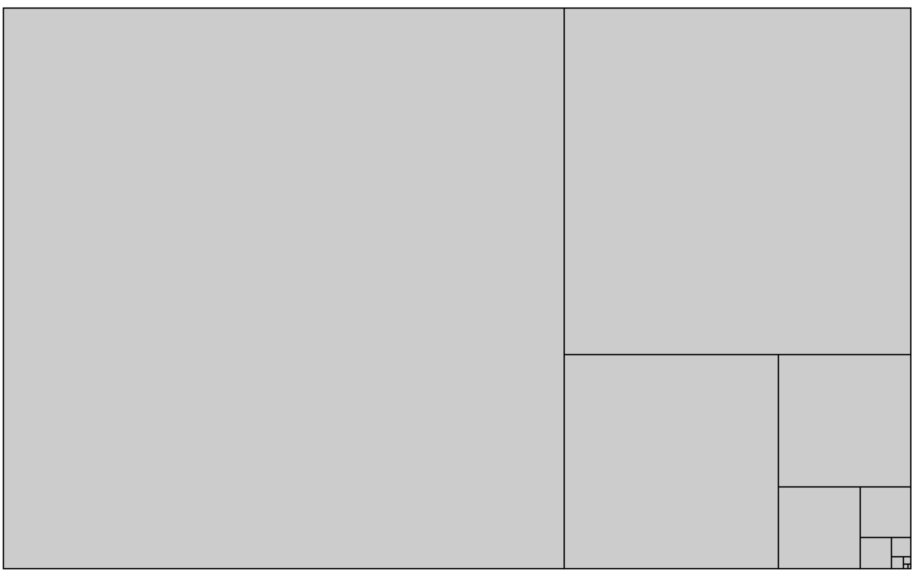


Bild 5

Als Ergebnis erhältst du ein Rechteck, das randvoll mit lauter Quadraten ist, die jeweils um den Faktor Φ kleiner sind. »Randvoll« ist nicht ganz richtig. Denn es bleibt immer ein winziger Rest übrig, den man nochmal unterteilen könnte ...

«| Ich habe jetzt ein wenig nachgegrübelt. Wenn ich mir diese winzigen Quadrate da ganz unten in der rechten Ecke anschauen möchte, dann brauche ich eine Lupe, um sie sehen zu können. Und wenn ich sie auf diese Weise vergrößert sehen kann, dann sieht alles genau so aus wie vorher, so wie die großen Quadrate. Da ist überhaupt kein Unterschied!

|» Ja, und das bleibt »in alle Ewigkeit« so. Es ändert sich nie etwas daran. Je mehr du es auch vergrößerst, es sieht immer gleich aus.

«| Ich brauche also gar nicht wirklich zu rechnen. Ich muss diese Quadrate lediglich verkleinern oder vergrößern, jetzt, wo ich weiß, dass das so ist.

|» Ja, aber Verkleinern oder Vergrößern ist etwas, das nicht durch Addition oder Subtraktion geschieht (also durch Dazu- oder Wegnehmen), sondern durch Multiplizieren oder Dividieren. Und wenn du es auf diese Weise machst, dann ist das nichts Anderes, als würdest du das Objekt einmal aus der Nähe und ein anderes Mal aus der Ferne betrachten. Du betrachtest jedoch immer ein und dasselbe Objekt. Anders ist es, wenn du tatsächlich etwas dazugibst oder wegnimmst. Dann ist das ein jeweils neues Objekt, das zwar gleich aussieht, aber nicht dieses selbe Objekt ist. Und noch etwas: Wenn du ein Objekt nur durch Vergrößern oder Verkleinern veränderst, so bleibt das Verhältnis seiner Abmessungen ebenfalls immer gleich. Du kannst nicht erkennen, ob die »Qualität«, die »Stimmigkeit« anders wird, denn das Objekt verändert sich ja überhaupt nicht. Wenn du aber jeweils das Ergebnis dessen, was du gerade getan hast, zum Ausgangspunkt des jeweils neuen Schrittes nimmst, den du machst, dann tritt tatsächlich eine Veränderung ein. Das Verhältnis der Objekte zueinander verändert sich, indem es sich der »Ideallinie« annähert. Ich nehme als Beispiel zwei unterschiedliche Quadrate und lege sie nebeneinander hin:

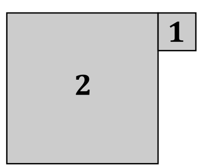


Bild 6

Du siehst sofort, dass das Verhältnis der Seitenlängen dieser beiden Quadrate zueinander keineswegs Φ entspricht. Wenn du oberhalb davon ein weiteres Quadrat dazulegst, das in seiner Seitenlänge der Summe der beiden Quadrate entspricht, und dann gleich links davon das Gleiche noch einmal machst, sieht das so aus:

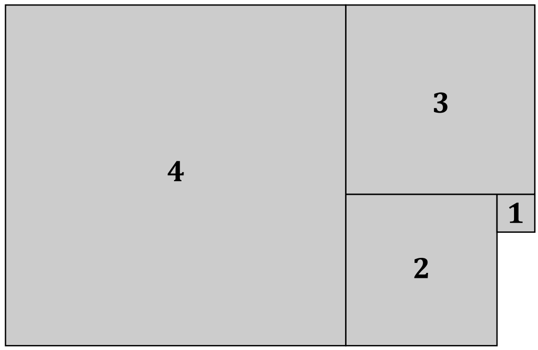


Bild 7

Man sieht auf einen Blick, dass das Verhältnis der beiden neuen Quadrate zueinander (Quadrat 4 zu Quadrat 3) bereits viel eher dem Wert von Φ entspricht. Wir haben hier nichts anderes getan, als unsere »Wachstumsregel« anzuwenden:

Nimm etwas und gib etwas Anderes dazu. Das Ergebnis ist etwas Neues.
Das machst du mit dem Anderen und dem Neuen wieder. Beliebig oft.

Nehmen wir ein weiteres Quadrat dazu (Bild 8):

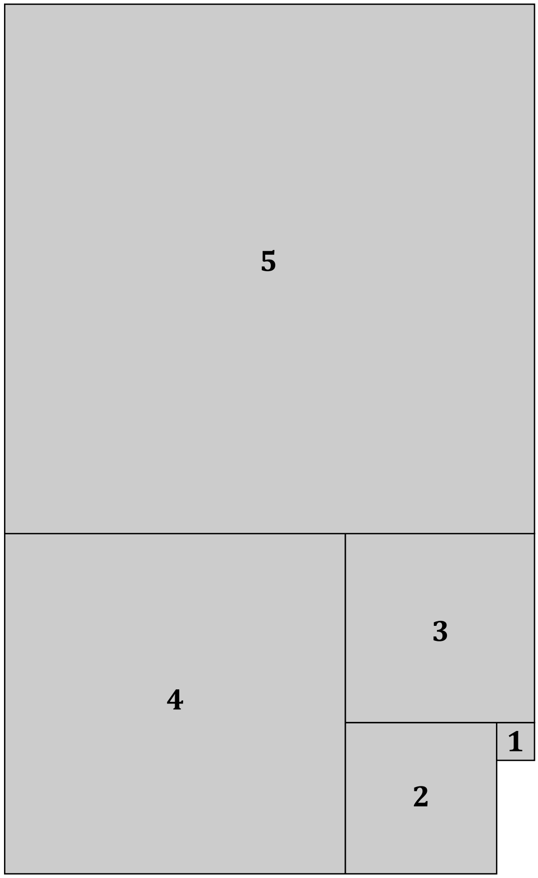


BILD 8

Die Seitenlängen der Quadrate 5 und 4 entsprechen in ihrem Verhältnis zueinander noch besser dem Wert von Φ als jene der Quadrate 4 und 3. Aber das kennst du ja nun schon ...

«| Weißt du, was mir auffällt? Durch Dazunehmen wird immer alles genauer, aber durch Wegnehmen kann ich das nicht erreichen. Durch oftmaliges Dazunehmen kann ich einen sehr genauen Wert von Φ erhalten. Beim »Zurückgehen«, also durch Wegnehmen, kann ich nur bis dorthin gehen, wo ich angefangen habe, ab dort wird es wieder ungenau ...

|» Ja, so ist das. Vorwärts geht es praktisch von alleine, dass du »in die Spur kommst«, zurück jedoch kippst du ab einem bestimmten Punkt unweigerlich heraus. Das »Werden« geschieht also immer nur in eine Richtung – nach »vorne« bzw. nach »oben«. Es ist wie mit der Zeit: Wenn du im Leben voranschreitest, dann nimmst du zu der Erfahrung, die du gerade gemacht hast, eine neue dazu, und das Ergebnis hat dich damit etwas genauer in deine Mitte gebracht. Die nächste Erfahrung, die auf den vorhergehenden aufbaut, bringt dich wieder ein wenig mehr in deine Mitte und so weiter ...

Zurückgehen kannst du jedoch nur bis zu jenem Punkt, von dem aus du begonnen hast – bis zu deiner »Geburt«. Davor war ja noch nichts ... Wenn du weiter zurückgehen willst, dann »spaltet es dich auf« (jeder Schritt wird abwechselnd Plus und Minus) und du siehst nur das, was du durch das Vorwärtsgehen ohnehin bereits kennst ...

Noch etwas fällt mir dazu ein: Die Genauigkeit, mit der du den Wert von Φ kennst, sagt etwas darüber aus, wie weit du zurückgehen kannst, bevor du »aus der Spur kippst«. Sie ist also ein direktes Maß deiner »Erfahrungen«, der Länge des Weges, den du zurückgelegt hast. Der gesamte Weg, den du gegangen bist, ist in dieser einen Zahl aufgezeichnet. Und zwar sowohl »innen« wie auch »außen« – also sowohl in den Nachkommastellen als auch im ganzzahligen Anteil. Und dabei ist es völlig egal, welchen Weg du genommen hast. Ob du von den Zahlen 17,3 und 3.889,2941 ausgegangen bist oder von den Zahlen −336,12 und 0,018997 – stets hast du dich der »Ideallinie« angenähert, aber du hast sie garantiert nicht exakt erreicht. Denk darüber nach!

Die Zahl Φ, so wie du sie kennst, der Wert, den du »errechnet« hast, also der genaue Wert des Verhältnisses der Zahlen, zu denen du nur auf diese eine Art und Weise gelangen konntest, indem du genau den Weg gegangen bist, den du genommen hast, enthält deinen gesamten Weg in sich. Sie ist die Aufzeichnung aller deiner »Erfahrungen«, die du gemacht hast. Und du kannst jederzeit von diesem Φ ausgehend beliebig weit diesen Weg zurückgehen, so weit, bis du zu deinem »Ursprung« gelangst, bis dorthin, von wo du ausgegangen bist. Weiter zurück gibt es nichts Neues zu finden.

Es gibt über diese Zahl Φ noch eine ganze Menge zu sagen. Darüber sind schon viele Bücher geschrieben worden.[1] Sie ist seit Jahrtausenden bekannt und sehr viele alte Gebäude sind so gebaut worden, dass deren Proportionen dieser Zahl, dem »Goldenen Schnitt«, entsprechen.

Viele Formeln wurden entdeckt, deren Ergebnis die Zahl Φ bildet. Am schönsten finde ich die beiden folgenden:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Die Formel hat die Form eines »unendlichen Kettenbruchs« und führte u. a. zu der mathematischen Erkenntnis, dass Φ die »irrationalste aller irrationalen Zahlen« sei.[2]

Zum gleichen Ergebnis kommt eine »unendlich verschachtelte Wurzel«:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

Ich überlasse es dir, die vielfältige Literatur dazu zu lesen und die darin enthaltenen Bilder zu bestaunen. Mein eigener Zugang zu den Zahlen war ein völlig anderer – ein spielerischer, ein ziemlich verrückter. Jener Radfahrer, der nie aus der Spur kippen wollte, und der daher immer in Bewegung bleiben wollte, der war ich. In noch jungen Jahren, während meiner Ausbildung zum Ingenieur der Elektrotechnik. Ich fuhr damals häufig in meiner Freizeit eine gut 10 km lange, stetig ansteigende Straße bergauf. Die Energie des jungen Mannes wollte sich austoben! Dabei kamen mir eine Menge Autos entgegen, die damals noch die alten österreichischen Kennzeichen trugen, welche nur aus einem Buchstaben und

1 Siehe Literaturliste am Ende des Buches

2 U. a. zu finden bei Florian Freistetter: Die irrationalste aller Zahlen https://www.spektrum.de/kolumne/die-irrationalste-aller-zahlen/1430636

einer (meist) 6-stelligen Zahl bestanden. Es blieb nur wenig Zeit bis zum nächsten Auto, oft nur wenige Sekunden. Und während dieser kurzen Augenblicke versuchte ich aus den zufällig vorbeihuschenden Ziffern der Kennzeichen eine »gültige Formel« zu bilden, eine Gleichung. Erlaubt waren alle Rechenoperationen: Die Grundrechnungsarten Addition, Subtraktion, Division und Multiplikation sowie Potenzieren und Wurzelziehen. Außerdem durfte ich beliebige Vorzeichen (+ und –) verwenden. Auch Klammern waren erlaubt, allerdings kann ich mich nicht erinnern, je eine verwendet zu haben.

Drei Beispiele mögen illustrieren, welcher Narrheit ich damals während der anstrengenden Bergauffahrten (ich bin immer ziemlich schnell gefahren!) frönte:

Kennzeichen: N 154763

$$-1+5=4=7-6+3$$

Kennzeichen: O 521477

$$5 \cdot 2 \cdot 1=-4+7+7$$

Kennzeichen: W 313823

$$3+13=8+2^3$$

Ich kann bis heute nicht sagen, warum mir dieses Spiel so viel Spaß gemacht hat. Es war einfach so – ein völlig harmloses Vergnügen. Und es »wurmte« mich, wenn ich mal keine Lösung fand oder die Zeit zwischen zwei Autos zu kurz war, um sie zu finden. Im Laufe der Zeit begegneten mir häufiger Autos, deren »Formel« ich bereits kannte. Ein kurzer Blick genügte, und ich wusste bereits, »wer das war«. Die Zahlen und ihre Gleichungen bekamen für mich eine Ähnlichkeit mit »Gesichtern«, die ich mir merken konnte, die ich auf einen Blick wiedererkennen konnte. Es war einfach »ein etwas anderer Blickwinkel auf die Welt«. Nicht mehr und nicht weniger. Ich empfinde Zahlen als überhaupt nichts Besonderes. Farben und Töne sind ja auch etwas Alltägliches. Eine Farbe entspricht einer bestimmten Wellenlänge oder Frequenz von Licht – eine Zahl pro Sekunde.

Und ein Ton entspricht einer bestimmten Schwingungsfrequenz von Luft, dem Schall – einer Anzahl Schwingungen pro Sekunde. Schwingt die Luft schneller, ist der Ton »höher«, schwingt sie langsamer, ist er »niedriger«. Ist die Farbe »rot«, schwingt das Licht, über welches ich die Farbe sehe, langsam – seine Wellenlänge ist »lang«. Blau hat eine kürzere Wellenlänge und schwingt daher schneller. Es ist so banal, dass wir kaum jemals darüber nachdenken.

Zahlen sind »Hilfsmittel für unseren Verstand«. Die »Natur«, also »alles, was außerhalb von uns« ist, scheint mittels Zahlen besser verstehbar zu sein.

»Alles ist Zahl!« soll Pythagoras, einer der berühmtesten Mathematiker, gesagt haben. Ich füge dem ein Wort hinzu: »Alles ist *auch* Zahl!« So wie alles eine Farbe hat. Oder eine Temperatur. Oder eine Masse. Oder eine Form. ...

Unter allen Zahlen im Universum (so weit wir es bisher kennen), bildet genau eine genau die Mitte aller Zentren.

Indem wir weiter voranschreiten und dem gerade Hinzugefügten etwas Neues hinzufügen, nähern wir uns dieser Mitte. »Innen« und »außen« sind dabei immer gleich und dennoch sehr verschieden. Wie im Großen, so im Kleinen. Überall im Leben kannst du es sehen. Sogar in den Zahlen, von denen manche Menschen behaupten, sie wären bloß Erfindungen ...

Eine Folge und deren Folgen

Die Glieder der Folge 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, … (auch *Lucas-Folge*[1] genannt) sind die ganzzahligen Teile der (ganzzahligen) Potenzen von Φ. Mit Potenz bezeichnen die Mathematiker die Anzahl, wie oft eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird. Wenn ich eine Zahl mit sich selbst multipliziere, dann entspricht das Ergebnis der 2. Potenz dieser Zahl – wir sagen dazu auch: das Quadrat dieser Zahl. Wenn ich beispielsweise das Quadrat von 7 berechne, dann rechne ich 7 · 7 = 49 oder auch $7^2=49$. Die kleine hochgestellte Zahl gibt die *Potenz* der Zahl 7 an. Man sagt dazu auch »7 zum Quadrat« oder »7 hoch 2«.

Multipliziert man das Ergebnis ein weiteres Mal mit 7, erhält man die 3. Potenz von 7: 7 · 7 · 7 = 343 oder auch $7^3=343$.

In unserem Fall haben wir die Zahl Φ wiederholt mit sich selbst multipliziert und sind so zu ihren Potenzen gelangt:

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= 1{,}6180\ldots \\
\Phi^2 &= 2{,}6180\ldots \\
\Phi^3 &= 4{,}2360\ldots \\
\Phi^4 &= 6{,}8541\ldots \\
\Phi^5 &= 11{,}0901\ldots \\
\Phi^6 &= 17{,}9442\ldots \\
\Phi^7 &= 29{,}0344\ldots \\
\Phi^8 &= 46{,}9787\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

1 Benannt nach Édouard Lucas, französischer Mathematiker, * 04.04.1842, † 03.10.1891 https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Lucas

Beim Betrachten der Folge, deren Glieder alle »gerundete« Potenzen von Φ sind, ist mir Folgendes aufgefallen:

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= 1\\
\Phi^2 &= 3\\
\Phi^3 &= 4\\
\Phi^4 &= 7\\
\Phi^5 &= 11\\
\Phi^6 &= 18\\
\Phi^7 &= 29\\
\Phi^8 &= 47\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Alle geraden Potenzen (also die Potenzzahlen 2, 4, 6, 8, ...) sind Zahlen, die von »echten Quadratzahlen« um genau 2 abweichen:

$$\begin{array}{lll}
\Phi^2 = 3 & \Phi^2 = \left(\Phi^1\right)^2 + 2 = 1^2 + 2 = 1+2 = 3\\
\Phi^4 = 7 & \Phi^4 = \left(\Phi^2\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 9-2 = 7\\
\Phi^6 = 18 & \Phi^6 = \left(\Phi^3\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 16+2 = 18\\
\Phi^8 = 47 & \Phi^8 = \left(\Phi^4\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 49-2 = 47\\
\Phi^{10} = 123 & \Phi^{10} = \left(\Phi^5\right)^2 + 2 = 11^2 + 2 = 121+2 = 123\\
\Phi^{12} = 322 & \Phi^{12} = \left(\Phi^6\right)^2 - 2 = 18^2 - 2 = 324-2 = 322\\
\Phi^{14} = 843 & \Phi^{14} = \left(\Phi^7\right)^2 + 2 = 29^2 + 2 = 841+2 = 843\\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Und zwar weichen sie immer abwechselnd um +2 oder –2 ab. Die »Schwankung um den Idealwert« ist also immer gleich groß, einmal um 2 darüber, dann wieder um 2 darunter, usw. Gemessen an der Größe der Zahl wird die Abweichung aber natürlich immer kleiner. Bei 7 fällt eine Abweichung von 2 viel mehr ins Gewicht als bei 843, und bei einer so großen Zahl wie $\Phi^{40} = 228.826.127$ wird sie geradezu winzig. Dennoch »schwingt die Oberfläche mit einer Amplitude[1] von +/– 2«.

Dieses Verhalten, dass hier immer eine Abweichung von genau 2 vorliegt, schien mir ziemlich auffällig. Ich schaute mir daher zunächst die ungeraden Potenzen näher an:

1 Amplitude: Maximaler Wert der Auslenkung einer Schwingung

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= 1 \\ \Phi^3 &= 4 \\ \Phi^5 &= 11 \\ \Phi^7 &= 29 \\ \Phi^9 &= 76 \\ \Phi^{11} &= 199 \\ \Phi^{13} &= 521 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Da war nichts zu sehen ... keine irgendwelchen Quadratzahlen ähnlichen Zahlen. Ich suchte also weiter und nahm mir die Potenzen, die sich durch 3 teilen lassen, vor:

$$\begin{aligned} \Phi^3 &= 4 \\ \Phi^6 &= 18 \\ \Phi^9 &= 76 \\ \Phi^{12} &= 322 \\ \Phi^{15} &= 1364 \\ \Phi^{18} &= 5778 \\ \Phi^{21} &= 24476 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vielleicht würde sich eventuell bei den 3. Potenzen eine Gesetzmäßigkeit erkennen lassen – und siehe da:

$$\begin{aligned} \left(\Phi^2\right)^3 = \Phi^6 &= 18 = 3^3 - 9 \\ \left(\Phi^3\right)^3 = \Phi^9 &= 76 = 4^3 + 12 \\ \left(\Phi^4\right)^3 = \Phi^{12} &= 322 = 7^3 - 21 \\ \left(\Phi^5\right)^3 = \Phi^{15} &= 1.364 = 11^3 + 33 \\ \left(\Phi^6\right)^3 = \Phi^{18} &= 5.778 = 18^3 - 54 \\ \left(\Phi^7\right)^3 = \Phi^{21} &= 24.476 = 29^3 + 87 \\ \left(\Phi^8\right)^3 = \Phi^{24} &= 103.682 = 47^3 - 141 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ich gebe zu, das hat etwas mehr als nur ein paar Minuten gedauert, bis ich diese Gesetzmäßigkeit herausgefunden hatte. Aber dass es sich hier um eine Gesetzmäßigkeit handelt, ist für ein geübtes Auge sofort erkennbar.

Auf der rechten Seite der Gleichung steht immer ein Wert aus unserer Folge und dazu eine Differenz. Diese Differenz ist jetzt nicht wie bei der quadratischen Tabelle immer genau 2, sondern steigt jeweils leicht an (leicht in Bezug auf den Ergebniswert). Ich erläutere die Werte etwas genauer am Beispiel der 4. Zeile:

$$(\Phi^5)^3 = \Phi^{15} = 1.364 = 11^3 + 33$$

Φ^5 ist das 5. Glied unserer Folge, also 11. Dieses erhebe ich zur 3. Potenz. Das ergibt dann die 15. Potenz von Φ. (Ich muss Φ zuerst 5-mal mit sich selbst multiplizieren, dadurch erhalte ich die 5. Potenz, und das muss ich insgesamt 3-mal machen, also $5 \cdot 3$-mal, das entspricht der 15. Potenz).

Die Abweichung zwischen $\Phi^{15} = 1.364$ und $11^3 = 1.331$ beträgt 33. Den Wert der Abweichung kann ich auch so schreiben:

$$33 = 3 \cdot 11$$

Schwant dir schon etwas? Schau dir die Zahlen der Abweichungen an:

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \cdot 3 \\ 12 &= 4 \cdot 3 \\ 21 &= 7 \cdot 3 \\ 33 &= 11 \cdot 3 \\ 54 &= 18 \cdot 3 \\ 87 &= 29 \cdot 3 \\ 141 &= 47 \cdot 3 \end{aligned}$$

«| Interessant!! Da will ich mir doch auch gleich mal jede 5. Potenz anschauen. Warum ausgerechnet jede 5. Potenz und nicht erst mal jede 4. Potenz? Weil ich die jeweils 4. Potenzen bereits kenne (sie sind ein Teil der jeweils 2. Potenzen ...). Also:

$$
\begin{aligned}
(\Phi^2)^5 = \Phi^{10} &= 123 = 3^5 - 120\\
(\Phi^3)^5 = \Phi^{15} &= 1.346 = 4^5 + 340\\
(\Phi^4)^5 = \Phi^{20} &= 15.127 = 7^5 - 1.680\\
(\Phi^5)^5 = \Phi^{25} &= 167.761 = 11^5 + 6.710\\
(\Phi^6)^5 = \Phi^{30} &= 1.860.498 = 18^5 - 29.070\\
(\Phi^7)^5 = \Phi^{35} &= 20.633.239 = 29^5 + 122.090\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Hmmm ... Die Differenzwerte wachsen jetzt aber ganz schön schnell! Da blicke ich noch nicht durch. Vielleicht sollte ich es doch vorher mit den jeweils 4. Potenzen versuchen ...

$$
\begin{aligned}
(\Phi^2)^4 = \Phi^{8} &= 47 = 3^4 - 34\\
(\Phi^3)^4 = \Phi^{12} &= 322 = 4^4 + 66\\
(\Phi^4)^4 = \Phi^{16} &= 2.207 = 7^4 - 194\\
(\Phi^5)^4 = \Phi^{20} &= 15.127 = 11^4 + 486\\
(\Phi^6)^4 = \Phi^{24} &= 103.682 = 18^4 - 1.294\\
(\Phi^7)^4 = \Phi^{28} &= 710.647 = 29^4 + 3.366\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Schon besser. Aber von einem linearen Anwachsen der Differenzwerte keine Spur. Eher schon ein quadratisches Anwachsen. Ja! Überprüfen wir doch, ob sich da quadratische Werte verstecken ... Wie wär’s, wenn wir die jeweilige Basiszahl zum Quadrat nehmen? In der 2. Reihe hieße der Wert 4^2, in der 3. Reihe 7^2. Nö, das kann nicht passen, das weicht zu viel von den tatsächlichen Differenzwerten ab. Eventuell ist ein Faktor dabei im Spiel, z. B. 4 (bei den 3. Potenzen war der Faktor 3 im Spiel, hier könnte es 4 sein ...). Also ausprobieren:

$$
\begin{aligned}
(\Phi^2)^4 = \Phi^{8} &= 47 = 3^4 - 4 \cdot 3^2 + 2\\
(\Phi^3)^4 = \Phi^{12} &= 322 = 4^4 + 4 \cdot 4^2 + 2\\
(\Phi^4)^4 = \Phi^{16} &= 2.207 = 7^4 - 4 \cdot 7^2 + 2\\
(\Phi^5)^4 = \Phi^{20} &= 15.127 = 11^4 + 4 \cdot 11^2 + 2\\
(\Phi^6)^4 = \Phi^{24} &= 103.682 = 18^4 - 4 \cdot 18^2 + 2\\
(\Phi^7)^4 = \Phi^{28} &= 710.647 = 29^4 + 4 \cdot 29^2 + 2\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Stimmt!! Das war gar nicht so schwer. Ob man die quadratischen Glieder positiv oder negativ nehmen soll, das sieht man ohnehin sofort, sobald man das erste Glied mit der 4. Potenz ausgerechnet hat. Und dann passt alles bereits bis auf den Rest 2. Dieser Wert 2 ist immer gleich, während das Vorzeichen bei den quadratischen Werten abwechselnd + und – ist.

Jetzt also nochmal zu den 5. Potenzen. Es wäre doch gelacht, wenn es mir nicht auch dort gelingen würde, das Bildungsgesetz herauszufinden:

$$
\begin{aligned}
(\Phi^2)^5 = \Phi^{10} &= 123 = 3^5 - 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3 \\
(\Phi^3)^5 = \Phi^{15} &= 1.364 = 4^5 + 5 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4 \\
(\Phi^4)^5 = \Phi^{20} &= 15.127 = 7^5 - 5 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7 \\
(\Phi^5)^5 = \Phi^{25} &= 167.761 = 11^5 + 5 \cdot 11^3 + 5 \cdot 11 \\
(\Phi^6)^5 = \Phi^{30} &= 1.806.498 = 18^5 - 5 \cdot 18^3 + 5 \cdot 18 \\
(\Phi^7)^5 = \Phi^{35} &= 20.633.239 = 29^5 + 5 \cdot 29^3 + 5 \cdot 29 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Voilà!! Bitte nachrechnen!

Ganz unter uns: Ich habe das nicht einfach so hingeschrieben, da musste ich ganz schön viel herumprobieren, bis alles gepasst hat. Aber nachdem die ersten 3 Werte zu einem richtigen Ergebnis führten, ich also auf der richtigen Spur war, klappte es auch bei allen anderen. Ich hatte das Bildungsgesetz gefunden!

Nun, das hat jetzt richtig Spaß gemacht – machen wir gleich weiter bei den jeweils 6. Potenzen:

$$
\begin{aligned}
(\Phi^2)^6 = \Phi^{12} &= 322 = 3^6 - 6 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^2 - 2 \\
(\Phi^3)^6 = \Phi^{18} &= 5.778 = 4^6 + 6 \cdot 4^4 + 9 \cdot 4^2 + 2 \\
(\Phi^4)^6 = \Phi^{24} &= 103.682 = 7^6 - 6 \cdot 7^4 + 9 \cdot 7^2 - 2 \\
(\Phi^5)^6 = \Phi^{30} &= 1.860.498 = 11^6 + 6 \cdot 11^4 + 9 \cdot 11^2 + 2 \\
(\Phi^6)^6 = \Phi^{36} &= 33.385.282 = 18^6 - 6 \cdot 18^4 + 9 \cdot 18^2 - 2 \\
(\Phi^7)^6 = \Phi^{42} &= 599.074.578 = 29^6 + 6 \cdot 29^4 + 9 \cdot 29^2 + 2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Woher der Faktor 9 bei den quadratischen Gliedern kommt ...?? Dazu habe ich vorläufig keine Ahnung. Ich werde jetzt erstmal etwas Systematik in diese Sache hineinbringen und schreibe die Faktoren in eine Tabelle:

		6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
1	**1**						1	
2	**3**					1		2
3	**4**				1		3	
4	**7**			1		4		2
5	**11**		1		5		5	
6	**18**	1		6		9		2

Tabelle 1

Die Spaltenüberschriften stellen die Potenzen dar, die Ziffern in der ganz linken Spalte die Potenzen p für Φ und die fettgedruckten Zahlen daneben jeweils den ganzzahligen Teil von Φ^p.

Sieht gut aus! Ein paar Dinge kann man auf einen Blick erkennen:

		6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
1	**1**						1	
2	**3**					1		2
3	**4**				1		3	
4	**7**			1		4		2
5	**11**		1		5		5	
6	**18**	1		6		9		2

Tabelle 2

Die hellgraue Linie ist klar, sie setzt sich immer mit dem Wert 1 nach links unten fort. Die mittelgraue Linie entspricht den Natürlichen Zahlen (beginnend bei 2). Die vertikale dunkelgraue Linie scheint sich nach unten mit dem konstanten Wert 2 immer in jeder 2. Zeile fortzusetzen.

Bleiben noch die beiden Werte 5 und 9 auf weißem Hintergrund. Hier kann ich auf den ersten Blick keine Gesetzmäßigkeit erkennen. Oder doch? 5 könnte die Summe aus den beiden Werten darüber sein ($5 = 3 + 2$), diese Vorgangsweise würde auch zum Wert ($9 = 4 + 5$) und allen übrigen Werten (z. B. $4 = 1 + 3$) passen.

Was mir noch auffällt: Die auf ganze Zahlen gerundeten Potenzen von Φ (1, 3, 4, 7, 11, 18, ...) entsprechen immer genau der Summe aller Faktoren in der jeweiligen Zeile:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
3 &= 1 + 2 \\
4 &= 1 + 3 \\
7 &= 1 + 4 + 2 \\
11 &= 1 + 5 + 5 \\
18 &= 1 + 6 + 9 + 2
\end{aligned}
$$

... ?

Geht das immer weiter so? Man kann es leicht überprüfen. Ich erweitere die Tabelle mit dieser Methode um 3 Zeilen und Spalten und überprüfe die Ergebnisse:

		11	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
1	**1**											1	
2	**3**										1		2
3	**4**									1		3	
4	**7**								1		4		2
5	**11**							1		5		5	
6	**18**						1		6		9		2
7	**29**					1		7		14		7	
8	**47**				1		8		20		16		2
9	**76**			1		9		27		30		9	
10	**123**		1		10		35		50		25		2
11	**199**	1		11		44		77		55		11	

Tabelle 3

Zunächst die Zeilensummen:

$$\begin{aligned} 29 &= 1 + 7 + 14 + 7 \\ 47 &= 1 + 8 + 20 + 16 + 2 \\ 76 &= 1 + 9 + 27 + 30 + 9 \end{aligned}$$

Alles passt!

Jetzt muss ich aber auch noch die Potenzsummen überprüfen. Ich beginne mit der 7. Zeile:

$$\begin{aligned} (\Phi^2)^7 &= \Phi^{14} = 843 = 3^7 - 7 \cdot 3^5 + 14 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3 \\ (\Phi^3)^7 &= \Phi^{21} = 24.476 = 4^7 + 7 \cdot 4^5 + 14 \cdot 4^3 + 7 \cdot 4 \\ (\Phi^4)^7 &= \Phi^{28} = 710.647 = 7^7 - 7 \cdot 7^5 + 14 \cdot 7^3 - 7 \cdot 7 \\ (\Phi^5)^7 &= \Phi^{35} = 20.633.239 = 11^7 + 7 \cdot 11^5 + 14 \cdot 11^3 + 7 \cdot 11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bis hierher stimmt alles. Meine Zuversicht steigt! Weiter mit der 8. Zeile:

$$\begin{aligned} (\Phi^2)^8 &= \Phi^{16} = 2.207 = 3^8 - 8 \cdot 3^6 + 20 \cdot 3^4 - 16 \cdot 3^2 + 2 \\ (\Phi^3)^8 &= \Phi^{24} = 103.682 = 4^8 + 8 \cdot 4^6 + 20 \cdot 4^4 + 16 \cdot 4^2 + 2 \\ (\Phi^4)^8 &= \Phi^{32} = 4.870.847 = 7^8 - 8 \cdot 7^6 + 20 \cdot 7^4 - 16 \cdot 7^2 + 2 \\ (\Phi^5)^8 &= \Phi^{40} = 228.826.127 = 11^8 + 8 \cdot 11^6 + 20 \cdot 11^4 + 16 \cdot 11^2 + 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Her mit dem Taschenrechner! ... Alle Werte stimmen! Jetzt traue ich mir schon hohe Wetten abzuschließen, dass auch die Werte in der Zeile 9 stimmen:

$$\begin{aligned} (\Phi^2)^9 &= \Phi^{18} = 5.778 = 3^9 - 9 \cdot 3^7 + 27 \cdot 3^5 - 30 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3 \\ (\Phi^3)^9 &= \Phi^{27} = 439.204 = 4^9 + 9 \cdot 4^7 + 27 \cdot 4^5 + 30 \cdot 4^3 + 9 \cdot 4 \\ (\Phi^4)^9 &= \Phi^{36} = 33.385.282 = 7^9 - 9 \cdot 7^7 + 27 \cdot 7^5 - 30 \cdot 7^3 + 9 \cdot 7 \\ (\Phi^5)^9 &= \Phi^{45} = 2.537.720.636 = 11^9 + 9 \cdot 11^7 + 27 \cdot 11^5 + 30 \cdot 11^3 + 9 \cdot 11 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ich bin jetzt sicher: Die Gesetzmäßigkeit ist erkannt!

Ich kann daher die Tabelle beliebig erweitern und mit ihrer Hilfe alle Potenzen von Φ auch in Form einer Potenzsumme darstellen.

		24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	**1**																								1	
2	**3**																							1		2
3	**4**																						1		3	
4	**7**																					1		4		2
5	**11**																				1		5		5	
6	**18**																			1		6		9		2
7	**29**																		1		7		14		7	
8	**47**																	1		8		20		16		2
9	**76**																1		9		27		30		9	
10	**123**															1		10		35		50		25		2
11	**199**														1		11		44		77		55		11	
12	**322**													1		12		54		112		105		36		2
13	**521**												1		13		65		156		182		91		13	
14	**843**											1		14		77		210		294		196		49		2
15	**1364**										1		15		90		275		450		378		140		15	
16	**2207**									1		16		104		352		660		672		336		64		2
17	**3571**								1		17		119		442		935		1122		714		204		17	
18	**5778**							1		18		135		546		1287		1782		1386		540		81		2
19	**9349**						1		19		152		665		1729		2717		2508		1254		285		19	
20	**15127**					1		20		170		800		2275		4004		4290		2640		825		100		2
21	**24476**				1		21		189		952		2940		5733		7007		5148		2079		385		21	
22	**39603**			1		22		209		1122		3740		8008		11 011		9438		4719		1210		121		2
23	**64079**		1		23		230		1311		4692		10 948		16 744		16 445		9867		3289		506		23	
24	**103682**	1		24		252		1520		5814		14 688		24 752		27 456		19 305		8008		1716		144		2

Tabelle 4

Ich mache noch einen abschließenden Test mit der 24. Zeile:

$$\begin{aligned}(\Phi^2)^{24} &= \Phi^{48} = 10.749.957.122 = \\ &= 3^{24} - 24 \cdot 3^{22} + 252 \cdot 3^{20} - 1.520 \cdot 3^{18} + 5.814 \cdot 3^{16} - 14.688 \cdot 3^{14} + \\ &\quad + 24.752 \cdot 3^{12} - 27.456 \cdot 3^{10} + 19.305 \cdot 3^{8} - 8.008 \cdot 3^{6} + 1.716 \cdot 3^{4} - \\ &\quad - 144 \cdot 3^{2} + 2\end{aligned}$$

Korrekt!

«| Wieso probierst du es nicht auch mal mit $(\Phi^1)^{24} = \Phi^{24}$?

|» Du hast recht. Ich habe das bloß deshalb bisher nicht gemacht, weil dann die Basen der einzelnen Potenzglieder jeweils 1 sind. Und 1 kann man beliebig oft mit sich selbst multiplizieren, es ändert sich dadurch nichts.

«| Aber es gibt doch auch noch jeweils die Faktoren vor jeder 1 ...

|» Klar! Jetzt sehe ich's! Das ist nichts Anderes als die jeweilige Zeilensumme der Faktoren! Ich nehme gleich noch mal die 24. Zeile her und rechne das nach:

$$\begin{aligned}(\Phi^1)^{24} &= \Phi^{24} = 103.682 = \\ &= 1^{24} - 24 \cdot 1^{22} + 252 \cdot 1^{20} - 1.520 \cdot 1^{18} + 5.814 \cdot 1^{16} - 14.688 \cdot 1^{14} + \\ &\quad + 24.752 \cdot 1^{12} - 27.456 \cdot 1^{10} + 19.305 \cdot 1^{8} - 8.008 \cdot 1^{6} + \\ &\quad + 1.716 \cdot 1^{4} - 144 \cdot 1^{2} + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

... hmmm. Das stimmt aber nicht! Da kommt als Ergebnis 2 heraus! Sonderbar ...

«| Ich weiß nicht, ob das falsch ist, aber bei der Berechnung der Zeilensummen hast du nie ein negatives Vorzeichen verwendet. Setz doch mal einfach alle Vorzeichen auf +.

|» Du hast recht. Ich schreibe jetzt auch die Potenzen von 1 nicht mehr hin, da 1 zu irgendeiner Potenz ohnehin immer 1 bleibt. Gib mir mal den Taschenrechner:

$$\begin{aligned}103.682 = {} & 1 + 24 + 252 + 1.520 + 5.814 + 14.688 + 24.752 + 27.456 + 19.305 + \\ & + 8.008 + 1.716 + 144 + 2\end{aligned}$$

Jetzt stimmt die Rechnung. Die Vorzeichen scheinen je nach Basis immer zu wechseln oder gleich zu bleiben.

Dieses Ergebnis 2 bei alternierenden Vorzeichen irritiert mich jetzt aber doch. Ich rechne das mal bei mehreren Zeilen nach. Ich möchte wissen, ob tatsächlich jeweils 2 herauskommt.

«| Berechne doch gleich *alle* Zeilen. Nimm dafür dein Tabellenkalkulationsprogramm.

|» Ja, mach ich. Ich berechne die Zeilensumme einmal mit lauter positiven Vorzeichen und daneben mit alternierenden Vorzeichen (also immer abwechselnd + und –).

	Summe +++...	Summe +−+−...	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	**1**	1																							1	
2	**3**	−1																						1		2
3	**4**	−2																					1		3	
4	**7**	−1																				1		4		2
5	**11**	1																			1		5		5	
6	**18**	2																		1		6		9		2
7	**29**	1																	1		7		14		7	
8	**47**	−1																1		8		20		16		2
9	**76**	−2															1		9		27		30		9	
10	**123**	−1														1		10		35		50		25		2
11	**199**	1													1		11		44		77		55		11	
12	**322**	2												1		12		54		112		105		36		2
13	**521**	1											1		13		65		156		182		91		13	
14	**843**	−1										1		14		77		210		294		196		49		2
15	**1364**	−2									1		15		90		275		450		378		140		15	
16	**2207**	−1								1		16		104		352		660		672		336		64		2
17	**3571**	1							1		17		119		442		935		1122		714		204		17	
18	**5778**	2						1		18		135		546		1287		1782		1386		540		81		2
19	**9349**	1					1		19		152		665		1729		2717		2508		1254		285		19	
20	**15127**	−1				1		20		170		800		2275		4004		4290		2640		825		100		2
21	**24476**	−2			1		21		189		952		2940		5733		7007		5148		2079		385		21	
22	**39603**	−1		1		22		209		1122		3740		8008		11 011		9438		4719		1210		121		2
23	**64079**	1	1		23		230		1311		4692		10 948		16 744		16 445		9867		3289		506		23	
24	**103682**	2	1		24		252		1520		5814		14 688		24 752		27 456		19 305		8008		1716		144		2

Tabelle 5

Die »normale« Zeilensumme hatten wir bereits, aber die »alternierende« sieht wirklich interessant aus. Die Werte schwanken zwischen +2 und –2, und das in einem stets gleich bleibenden Rhythmus. Nach 6 Potenzen wiederholt sich alles.

Es erinnert mich an eine Sinuskurve:

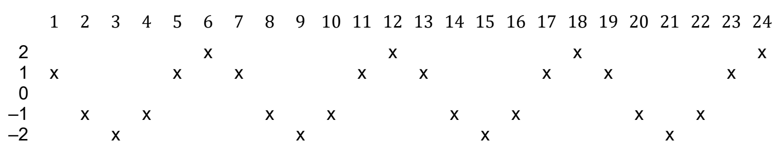


Bild 9

«| ... oder eine Schlange, die sich um eine gerade Linie herum vorwärtswindet ...

|» Diese »Schlange« werde ich im Auge behalten ... ich habe es mir soeben notiert. – Sag mal, was hältst du davon, wenn wir uns den Aufbau unserer schönen Tabelle etwas näher ansehen? Vielleicht finden wir noch ein paar besondere Dinge.

«| Gute Idee!

|» Die diversen grauen Linien sind bereits eingezeichnet. Das Nächste, das mir auffällt, ist die Spalte gleich links neben der vertikalen 2er-Linie, sie enthält alle ungeraden Zahlen.

«| Und die Spalte wiederum links davon enthält lauter „Quadratzahlen“!

|» Wie bitte? 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, … Ah, tatsächlich – lauter Quadrate!

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 4 \\ 3^2 &= 9 \\ 4^2 &= 16 \\ 5^2 &= 25 \\ 6^2 &= 36 \\ 7^2 &= 49 \\ 8^2 &= 64 \\ 9^2 &= 81 \\ &\vdots \end{aligned}$$

«| Noch eine Spalte weiter links siehst du jeweils die Anzahl von Kugeln, wenn du sie zu einer quadratischen Pyramide stapelst (BILD 10):

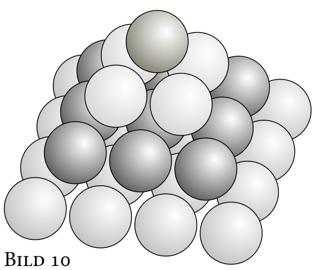


BILD 10

$$\begin{aligned} &1 \\ &1+4 &&= 5 \\ &1+4+9 &&= 14 \\ &1+4+9+16 &&= 30 \\ &1+4+9+16+25 &&= 55 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mir fällt noch etwas auf: Die mittelgraue Linie beginnt mit 2 und nicht mit 1. Ich hätte mir erwartet, dass sie mit 0 oder 1 beginnt.

|» Vielleicht gehört ja diese 1 ohnehin dorthin ... und zusätzlich könnte man auch gleich noch die hellgraue Linie weiter nach oben hin verlängern:

Tabelle 7a

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
										1	
									1		1
								1		2	
							1		3		
						1		4		2	
					1		5		5		
				1		6		9		2	
			1		7		14		7		
		1		8		20		16		2	
	1		9		27		30		9		
1		10		35		50		25		2	

Das gefällt mir! Auf diese Weise stimmt sogar der Wert der 2 sowohl in der dunkelgrauen vertikalen Linie (lauter 2er) als auch in der mittelgrauen Linie (1, 2, 3, 4, ...).

«| Wie meinst du das?

Tabelle 7b

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
										1	
									1		1
								1		2	
							1		3		
						1		4		2	
					1		5		5		
				1		6		9		2	
			1		7		14		7		
		1		8		20		16		2	
	1		9		27		30		9		
1		10		35		50		25		2	

|» Der erste 2er-Wert ergibt sich dadurch wie bei allen anderen Zahlen in der Tabelle durch Addition der beiden oberhalb (bzw. rechts oberhalb) stehenden Zahlen, nämlich 1 + 1 = 2.

«| Und die anderen 2er darunter in der dunkelgrauen Linie ergeben sich durch Addition von 2 + 0 = 2 !

Tabelle 7c

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
										1	
									1		1
								1		2	
							1		3		
						1		4		2	
					1		5		5		
				1		6		9		2	
			1		7		14		7		
		1		8		20		16		2	
	1		9		27		30		9		
1		10		35		50		25		2	

|» Wenn man »nichts« als 0 interpretiert ... die Idee gefällt mir!

«| Weißt du, was mich an unserer ganzen Konstruktion noch stört? Sie enthält lediglich den ganzzahligen Teil der Potenzen von Φ. Meinst du, wir könnten da auch irgendwo die Teile rechts vom Komma herauslesen?

|» Puh! Du stellst Fragen ... Aber es ist natürlich eine sehr gute Frage ...

Lass mich mal überlegen. Mir fällt auf, dass es in unserer Tabelle eine einzige Zahl gibt, die *rechts* von der dunkelgrauen Linie liegt: Im mittelgrauen Feld mit der 1. Links davon steht ebenfalls eine 1 und sonst nichts. Die linke 1 liegt unter der Potenz 1, d. h. sie bedeutet Φ^1. Und die rechte 1? Die liegt unter keinem Potenzwert.

«| Doch! Verlängere die oberste Zeile, in welcher die fettgedruckten Potenzwerte stehen, weiter nach rechts! Mach es so wie auf einer normalen Zahlengeraden, da geht es »unterhalb« von 0 mit –1, –2, … etc. weiter. Und dann liegt die mittelgraue 1 unterhalb der Potenz –1.

|» Ja, prima!! Das würde sogar stimmen, denn der Wert rechts vom Komma der Zahl Φ entspricht ja tatsächlich ihrem Kehrwert. Kehrwerte[1] schreibt man in der Mathematik auch als »hoch minus 1«. Schreiben wir es auf:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi} \;\Rightarrow\; 0{,}61803 = \frac{1}{1{,}61803}$$

«| Ich mache dir noch einen Vorschlag: Wir haben in der Tabelle bereits zwei schräg laufende graue Linien eingezeichnet. Zeichnen wir probehalber eine weitere parallel dazu verlaufende Linie ein – ich strichliere den Rahmen:

10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**–1**	**–2**
										1		
									1		1	
								1		2		
							1		3		0	
						1		4		2		
					1		5		5			
				1		6		9		2		
			1		7		14		7			
		1		8		20		16		2		
	1		9		27		30		9			
1		10		35		50		25		2		

Tabelle 8

|» Ah, ich sehe, du hast auch bereits eine 0 in der strichlierten Linie eingezeichnet! Wir hatten ja vorhin gesagt, dass rechts von der »2er-Spalte« lauter Nullen sein müssten. Aber passt das auch zu der strichlierten Linie? Sehen wir uns doch den »Verlauf« der strichlierten Linie von links unten nach rechts oben an: 35, 27, 20, 14, 9, 5, 2, 0.

$$\begin{aligned}
35 - \mathbf{8} &= 27\\
27 - \mathbf{7} &= 20\\
20 - \mathbf{6} &= 14\\
14 - \mathbf{5} &= 9\\
9 - \mathbf{4} &= 5\\
5 - \mathbf{3} &= 2\\
2 - \mathbf{2} &= 0\\
0 - \mathbf{1} &= -1
\end{aligned}$$

«| Heehh! Halt, stopp! Was machst du denn da?

1 In der Mathematik auch »reziproker Wert« genannt

|» Wieso?

«| Na, du bist über die 0 hinausgegangen ...

|» Das stimmt nur zum Teil. Ich habe von den Werten einen fortlaufend um 1 geringeren Betrag abgezogen, und zwar so lange, bis dieser abzuziehende Betrag 1 war. Schau auf die *fettgedruckten* Werte in der Mitte der Auflistung!
(8 7 6 5 4 3 2 1)

«| Ah! Ja gut, dann haben wir jetzt auch einen Wert für das bisher leer gebliebene strichlierte Feld, nämlich –1. Das ist auch wirklich passend, denn dadurch ergibt sich für die strichlierte 0 sogar eine richtige Addition (nach der gleichen Vorgangsweise wie bei den anderen Zahlen):

$$1+(-1)=0$$

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2
										1		
									1		1	
								1		2		–1
							1		3		0	
						1		4		2		
					1		5		5			
				1		6		9		2		
			1		7		14		7			
		1		8		20		16		2		
	1		9		27		30		9			
1		10		35		50		25		2		

Tabelle 9

Mhm. Der Wert –1 ist zwar eigenartig, aber ich denke, über die Vorzeichen sollten wir uns vorerst nicht allzuviele Gedanken machen, denn auf der »linken« Seite der Tabelle sind sie ja ebenfalls manchmal alternierend, obwohl in unserer Tabelle ausschließlich positive Werte eingetragen sind.

Ich möchte jetzt bei den nichtganzzahligen Teilen der Potenzen von Φ weitermachen. Sie entsprechen immer dem Kehrwert der jeweiligen Potenz von Φ, also

$$\frac{1}{\Phi^1} = \Phi^{-1} = \frac{1}{1{,}61083} = 0{,}61803$$
$$\frac{1}{\Phi^2} = \Phi^{-2} = \frac{1}{2{,}61083} = 0{,}38197$$
$$\frac{1}{\Phi^3} = \Phi^{-3} = \frac{1}{4{,}23607} = 0{,}23607$$
$$\frac{1}{\Phi^4} = \Phi^{-4} = \frac{1}{6{,}85410} = 0{,}14590$$
$$\frac{1}{\Phi^5} = \Phi^{-5} = \frac{1}{11{,}09017} = 0{,}09017$$
$$\vdots$$

Auf der linken Seite der Tabelle haben wir aber nie mit dem konkreten Wert der Potenzen von Φ gearbeitet, sondern immer mit den gerundeten ganzzahligen Werten. Wir haben also **4** statt 4,23607 verwendet, **7** statt 6,85410, **11** statt 11,09017 usw. Können wir so etwas auch mit den nichtganzzahligen Teilen machen? Wie wäre es, wenn wir jeweils den Kehrwert dieser »gerundeten« ganzzahligen Werte von Φ nehmen?

$$1 \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$$
$$3 \Rightarrow \frac{1}{3} = 0{,}33333$$
$$4 \Rightarrow \frac{1}{4} = 0{,}25$$
$$7 \Rightarrow \frac{1}{7} = 0{,}14286$$
$$11 \Rightarrow \frac{1}{11} = 0{,}09091$$
$$18 \Rightarrow \frac{1}{18} = 0{,}05556$$
$$29 \Rightarrow \frac{1}{29} = 0{,}03448$$
$$\vdots$$

«| Das entspricht annähernd den tatsächlichen Werten. Je größer die Werte werden, desto genauer sind die Ergebnisse.

|» Das war zu erwarten. Wie sieht es mit den höheren Potenzen aus? In unserer Tabelle setzen sich die höheren Potenzen aus Potenzsummen zusammen, die immer nur Glieder mit geraden oder ungeraden Potenzen enthalten. Also z. B.

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
\Phi^9 &= 76 = 1^9 + 9 \cdot 1^7 + 27 \cdot 1^5 + 30 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^1\\
\Phi^{10} &= 123 = 1^{10} + 10 \cdot 1^8 + 35 \cdot 1^6 + 50 \cdot 1^4 + 25 \cdot 1^2 + 2\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Eventuell ist das auch bei den negativen Potenzen so. Vielleicht gibt uns unsere Tabelle einen brauchbaren Hinweis. In der ganz oberen Zeile haben wir die Potenzen eingetragen – rechts von der vertikalen 2er-Linie werden diese negativ. Eventuell setzt sich die Tabelle dorthin noch fort. Bei der gestrichelten Linie haben wir immerhin den Wert –1 unterhalb der Potenz –2 gefunden. Das ist schon mal ein Anfang. Wie könnte denn ein Wert unterhalb der Potenz –3 aussehen?

Wir hatten die Werte der gestrichelten Linie erhalten, indem wir (ich beginne bei 9 in der Spalte mit der Potenz 2) den zwei Zeilen genau darüberliegenden Wert 4 abzogen, dann bei 5 den wieder zwei Zeilen genau darüberliegenden Wert 3 abzogen, bei 2 haben wir 2 abgezogen und 0 erhalten, dort haben wir dann 1 abgezogen und –1 erhalten und jetzt ... ziehen wir 0 ab und erhalten wieder –1. Ich sage das jetzt einfach mal so, denn der zwei Zeilen oberhalb der –1 liegende Wert könnte 0 sein.

«| Wie kommst du darauf?

|» Ich habe die mittelgraue Linie um einen Wert verlängert – und der scheint 0 zu sein: … 6, 5, 4, 3, 2, 1 – da kann anschließend »logischerweise« nichts Anderes als 0 kommen (Siehe Tabelle 10)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3
										1		0	
									1		1		–1
								1		2		–1	
							1		3		0		
						1		4		2			
					1		5		5				
				1		6		9		2			
			1		7		14		7				
		1		8		20		16		2			
	1		9		27		30		9				
1		10		35		50		25		2			

Tabelle 10

«| Mach bitte Folgendes: Leg neben die strichlierte Linie noch eine weitere parallele Linie hin ...

|» Meinst du hier? Ich habe sie wieder strichliert, aber weiß gemacht (TABELLE 11).

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3
										1		0	
									1		1		–1
								1		2		–1	
							1		3		0		1
						1		4		2		0	
					1		5		5		0		
				1		6		9		2			
			1		7		14		7				
		1		8		20		16		2			
	1		9		27		30		9				
1		10		35		50		25		2			

TABELLE 11

Ich erhalte in der Spalte mit der Potenz –3 die Zahl 1.

Lass mich ein wenig überlegen ... Links haben wir immer die Faktoren zu den jeweiligen Potenzen aufgetragen, diese dann zeilenweise zusammengezählt und Φ zur jeweiligen Potenz erhoben erhalten. Also z. B.

$$4 = 1^3 + 3 \cdot 1^1$$
$$7 = 1^4 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^0$$

Rechts müssten dann lauter Werte auftreten, die kleiner als 1 sind – also lauter Brüche. Wenn ich den Kehrwert von beispielsweise Φ^6 nehme, ... sei bitte still, ich denke nach ...

$$\Phi^6 = 17{,}94427$$
$$\Phi^{-6} = \frac{1}{\Phi^6} = \frac{1}{17{,}94427} = 0{,}05577281$$

Wenn ich immer den ganzzahligen Teil der Potenzen von Φ nehme ...

$$\frac{1}{18} = 0{,}0555555\ldots$$

... dann fehlt noch ein kleines bisschen auf den Wert 0,0557281. Wieviel ist denn das? Rechne das bitte aus.

«| Das ist 0,0557281 – 0,0555555 = 0,0001726.

|» Und jetzt nimm bitte den Kehrwert dieser Zahl.

«| Dieser ist $\frac{1}{0{,}0001726} = 5.793{,}7428$.

|» Kommt dir diese Zahl bekannt vor?

«| Nein ... Moment, warte, ... sie liegt sehr nahe bei $\Phi^{18} = 5.778$. Wir sind vom Kehrwert von

$$\Phi^{-6} = \frac{1}{\Phi^6} \approx \frac{1}{18}$$

ausgegangen. Und 18 ist $3 \cdot 6$ ...

|» Du bringst mich auf eine Idee. Rechnen wir das mal für die größere Zahl auf wesentlich mehr Stellen genau aus.

$$\Phi^{18} = 5.777{,}99982692972828776065238000 08$$

Ich probiere jetzt aus, welches Ergebnis ich erhalte, wenn ich vom ganzzahligen Wert 5.778 dessen Kehrwert abziehe:

$$5.778 - \frac{1}{5.778} = 5.777{,}99982692973347178954655590 17$$

Dacht' ich mir's doch! Dieser Wert liegt *sehr* nahe am richtigen Wert! Und zwar liegt er ganz knapp darüber. Und jetzt ziehen wir auch noch den Kehrwert der 3. Potenz von 5.778 ab:

$$5.778 - \frac{1}{5.778} - \frac{1}{5.778^3} = 5.777{,}99982692972828776096293772 87$$

«| Huiii! Eine Genauigkeit von 18 Stellen nach dem Komma!! Wie bist du denn auf diese Idee gekommen?

|» Schau dir unsere TABELLE 11 an: Da steht in der Zeile mit der Potenz 1 links von der vertikalen 2er-Spalte unterhalb der Potenz 1 eine 1 und rechts davon ebenfalls (die mittelgraue 1). Aber unter der Spalte mit der Potenz –3 steht nochmal eine 1 (mit negativem Vorzeichen, aber die Vorzeichen können sich ja ändern, wie wir auf der linken Seite bereits gesehen haben). Diese 1 in der Spalte mit der

Potenz –3 ist der Grund, warum ich 5.778 auch noch mit der Potenz –3 abgezogen habe! Probieren wir es auch noch mit der Potenz –5 ... vielleicht klappt es ja!

$$5.778-\frac{1}{5.778}-\frac{1}{5.778^{3}}-\frac{1}{5.778^{5}}=5.777{,}99982692972828776080765887 64$$

«| Das hat nicht funktioniert, die Genauigkeit ist um keine einzige weitere Stelle gewachsen ...

|» Mein Gefühl sagt mir aber, dass ich auf der richtigen Spur bin ... probier es bei der 5. Potenz mit einem Faktor – der Faktor 2 könnte schätzungsweise passen.

$$5.778-\frac{1}{5.778}-\frac{1}{5.778^{3}}-\frac{2}{5.778^{5}}=5.777{,}999826929728287760652380024 1$$

«| Und wie er passt! Die Übereinstimmung ist bereits bis zur 25. Stelle nach dem Komma angewachsen! Das ist bestimmt kein Zufall.

|» Hoffen wir's! Aber ich habe nun auf alle Fälle einen neuen Wert für unsere Tabelle! Nämlich eine 2 unterhalb der Spalte mit der Potenz –5.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5
										1		0			
									1		1		–1		2
								1		2		–1			
							1		3		0		1		
						1		4		2		0			
					1		5		5		0				
				1		6		9		2					
			1		7		14		7						
		1		8		20		16		2					
	1		9		27		30		9						
1		10		35		50		25		2					

Tabelle 12

Bevor ich an der Tabelle weitertüftle, möchte ich die Rechnung auch noch für eine andere Potenz von Φ überprüfen – sicher ist sicher! Ich nehme einen kleineren Wert: Φ^{10} – Rechne das bitte nach!

«| O. k.

$$\Phi^{10} = 122{,}991869381244216651252275890 11$$

$$123 - \frac{1}{123} = 122{,}99186991869918699186991869919$$

$$123 - \frac{1}{123} - \frac{1}{123^3} = 122{,}99186938131526863553386674061$$

$$123 - \frac{1}{123} - \frac{1}{123^3} - \frac{2}{123^5} = 122{,}99186938124422839250969646472$$

|» Die Übereinstimmung wächst diesmal etwas weniger schnell, reicht aber immerhin bereits bis zur 13. Stelle nach dem Komma. Prima!

Ich würde gerne alles mit einem noch kleineren Potenzwert von Φ überprüfen. Voraussichtlich wird die Genauigkeit dann noch weiter abnehmen, aber das Prinzip müsste trotzdem stimmen ...

«| Nehmen wir Φ^5?

|» Ja, du kannst schon zu rechnen beginnen.

$$\Phi^5 = 11{,}09016994374947424102293417182 8$$

$$11 - \frac{1}{11} = 10{,}90909090909090909090909090909091$$

«| Da stimmt etwas nicht ... ah, ich hab's! Wir haben diesmal eine ungerade Potenz von Φ genommen und diese liegt knapp *über* dem ganzzahligen Wert, ich muss also wohl den Kehrwert von 11 addieren anstatt ihn abzuziehen.

$$11 + \frac{1}{11} = 11{,}09090909090909090909090909090909$$

Das kommt schon eher hin!

$$11 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^3} = 11{,}09166040570999248685199098422 2$$

Da stimmt aber schon wieder etwas nicht ... der Wert ist zu groß. Ich probiere es besser mit einem negativen Vorzeichen beim letzten Term.

$$11+\frac{1}{11}-\frac{1}{11^3}=11{,}0901577761081893313298271975 96$$

|» Die Genauigkeit ist jetzt angestiegen. Die Vorzeichen alternieren vermutlich!

$$11+\frac{1}{11}-\frac{1}{11^3}+\frac{2}{11^5}=11{,}09017019453465051443331615451$$

«| Sehr gut, wir liegen nun wieder knapp über dem Idealwert, und das ist gut so, denn der nächste Term hat wieder ein negatives Vorzeichen. Fragt sich nur, wie groß er ist ...

|» Probier einfach so lange, bis der nächste Wert wieder unterhalb des Idealwertes liegt. Die Potenz muss auf alle Fälle –7 sein. Du darfst nur den Faktor variieren!

«| In Ordnung. Ich beginne auf gut Glück mit dem Faktor 3.

$$11+\frac{1}{11}-\frac{1}{11^3}+\frac{2}{11^5}-\frac{3}{11^7}=11{,}09017004058721504522128943190 4$$

Das war noch zu wenig, ich brauche einen etwas größeren Faktor – ich nehme 4.

$$11+\frac{1}{11}-\frac{1}{11^3}+\frac{2}{11^5}-\frac{4}{11^7}=11{,}09016998927140322215061385770 2$$

Immer noch nicht genug – ich erhöhe auf 5. Das ist fast wie im Casino ...

$$11+\frac{1}{11}-\frac{1}{11^3}+\frac{2}{11^5}-\frac{5}{11^7}=11{,}09016993795559139907993828349 9$$

|» Jaaa, das schaut gut aus, jetzt liegst du ganz knapp darunter. Mir scheint das eine geeignete Methode zu sein, um noch ein paar weitere Werte zu finden. Ein Mathematiker würde wohl die Nase rümpfen, wenn er uns hier zusehen könnte, ab das ist mir wurscht. Leg los!

«| Der nächste Term muss wieder ein positives Vorzeichen haben und der Faktor wächst vermutlich wieder etwas an. Ich probier’s mit dem Faktor 10.

$$11+\frac{1}{11}-\frac{1}{11^3}+\frac{2}{11^5}-\frac{5}{11^7}+\frac{10}{11^9}=11{,}090169942196567582804787504508$$

Mhm. Zu groß war der Faktor jedenfalls nicht, wir liegen noch knapp unterhalb des Idealwerts. Ich erhöhe auf ... was ist?

|» Lass dich nicht stören, ich mach uns inzwischen einen Kaffee, während du rechnest.

~~~ ~~~ Es duftet nach Kaffee! ~~~ ~~~

Hast du den nächsten Faktor gefunden?

«| Ja, er ist 14! Schau:

$$11+\frac{1}{11}-\frac{1}{11^3}+\frac{2}{11^5}-\frac{5}{11^7}+\frac{14}{11^9}=11{,}090169943892958056294727192911$$

|» Prima, dann werden wir jetzt unsere Tabelle etwas erweitern!

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
										1		0							
									1		1		1		2		5		14
								1		2		1							
							1		3		0		1						
						1		4		2		0							
					1		5		5		0								
				1		6		9		2									
			1		7		14		7										
		1		8		20		16		2									
	1		9		27		30		9										
1		10		35		50		25		2									

Tabelle 13

«| Ich bin schon gespannt auf den fehlenden Faktor in der weiß-gestrichelten Linie (unterhalb der Potenz −4).

|» Du sprichst mir aus der Seele! Hast du eine Idee, welcher Wert da hingehört?

«| Ich tippe auf 1 oder 2. Alle anderen Werte schließe ich aus.

|» Deine Annahme klingt schlüssig. Probieren wir es zunächst mit 1.

«| Ich nehme wieder Φ^5, das kenne ich schon so gut.

|» Achtung, diesmal bewegen wir uns aber eine Zeile unterhalb, du musst also die Potenzen alle mit 2 multiplizieren!

«| Verstanden. Ich wähle ab sofort die Schreibweise ohne Brüche, also mit negativen Potenzen statt der Brüche.

$$\Phi^{10} = 122{,}99186938124421665125227589011$$
$$(\Phi^5)^2 = 11^2 + 2 - 11^{-2} + 11^{-4} = 122{,}99180383853561915169728843658$$

|» Knapp darunter. Nimm den Faktor 2 beim letzten Term.

$$(\Phi^5)^2 = 11^2 + 2 - 11^{-2} + 2 \cdot 11^{-4} = 122{,}99187213988115565876647769961$$

Wunderbar! Rechne bitte noch zwei weitere Faktoren aus.

«| Bitte schön:

~~~ ~~~ *Es dauert ein paar Minuten, bis das Ergebnis auf dem Papier ist* ~~~ ~~~

$$\begin{aligned}(\Phi^5)^2 &= 11^2 + 2 - 11^{-2} + 2 \cdot 11^{-4} - 5 \cdot 11^{-6} + 14 \cdot 11^{-8} = \\ &= 122{,}99186938282253861924199912202\end{aligned}$$

Fällt dir etwas auf?

|» Na klar, das sind die gleichen Faktoren wie eine Zeile darüber ... Anscheinend ist hier ein anderes Bildungsgesetz im Spiel als auf der linken Seite. Überprüfen wir das auch noch eine Zeile darunter, du kannst gerne wieder als Ausgangszahl Φ^5 nehmen.

«| Mach ich. Aber vorher trage ich noch die neu errechneten Faktoren in unsere Tabelle ein (TABELLE 14).
~~~

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
										1		0							
									1		1		1		2		5		14
								1		2		1		2		5		14	
							1		3		0		1						
						1		4		2		0							
					1		5		5		0								
				1		6		9		2									
			1		7		14		7										
		1		8		20		16		2									
	1		9		27		30		9										
1		10		35		50		25		2									

Tabelle 14

$$\Phi^{15} = 1.364{,}000733137435857404797968963$$

$$(\Phi^5)^3 = 11^3 + 3 \cdot 11^1 - 0 \cdot 11^{-1} + 1 \cdot 11^{-3} = 1.364{,}00075131480090$$

Das ist jetzt mal der Wert mit den bekannten Faktoren. Ich probiere es wieder mit dem Faktor 2. Den Term mit dem Faktor 0 lasse ich weg, da er keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.

$$(\Phi^5)^3 = 11^3 + 3 \cdot 11^1 + 1 \cdot 11^{-3} - 2 \cdot 11^{-5} = 1.364{,}00073889637444$$

|» Dieser Faktor ist anscheinend falsch. Er ist zu klein, wir liegen noch über dem richtigen Wert!

«| Hmm. Du hast recht. Ich probier’s mit 3.

$$(\Phi^5)^3 = 11^3 + 3 \cdot 11^1 + 1 \cdot 11^{-3} - 3 \cdot 11^{-5} = 1.364{,}00073268716121$$

|» Treffer! Nächster Wert bitte!

«| Welchen Faktor schlägst du für den ersten Versuch vor?

|» Nimm einfach wieder die 5. Ich räum inzwischen die Küche auf.

~~~ ~~~ Geschirrklappern und leise Musik im Hintergrund ~~~ ~~~

Wie sieht’s aus?

«| Eigenartig. Schau her:

$$(\Phi^5)^3 = 11^3 + 3 \cdot 11^1 + 1 \cdot 11^{-3} - 3 \cdot 11^{-5} + 9 \cdot 11^{-7} - 28 \cdot 11^{-9} =$$
$$= 1.364{,}0007331371287828963123508$$

|» Aha. Trag doch bitte die gewonnenen Werte in die Tabelle ein.

«| Schon geschehen:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
										1		0							
									1		1		1		2		5		14
								1		2		1		2		5		14	
							1		3		0		1		3		9		28
						1		4		2		0							
					1		5		5		0								
				1		6		9		2									
			1		7		14		7										
		1		8		20		16		2									
	1		9		27		30		9										
1		10		35		50		25		2									

Tabelle 15

|» Naja, ganz so eigenartig ist das gar nicht. Ich erkenne hier gleich mehrere Muster ... am besten hinterlege ich sie mit einem Grauton, dann sind sie leichter erkennbar:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
										1		0							
									1		1		2		5		14		14
								1		2		2		5		14		14	
							1		3		0		3		9		28		
						1		4		2									
					1		5		5		0								
				1		6		9		2									
			1		7		14		7										
		1		8		20		16		2									
	1		9		27		30		9										
1		10		35		50		25		2									

Tabelle 16

«| Aha, du meinst, das setzt sich nach rechts unten genauso fort wie auf der linken Seite? Das möchte ich unbedingt ausprobieren. Ich verlängere die neuen grauen Linien nach rechts unten (Tabelle 17a).

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10	−11	−12	−13
										1		0		0									
									1		1		1		2		5		14				
								1		2		1		2		5		14					
							1		3		0		1		3		9		28				
						1		4		2		0		1		4		14					
					1		5		5		0				1		5		20				
				1		6		9		2						1		6		27			
			1		7		14		7								1		7		35		
		1		8		20		16		2								1		8		44	
	1		9		27		30		9										1		9		54
1		10		35		50		25		2										1		10	

Tabelle 17a

|» Noch etwas kannst du gleich eintragen: in der obersten Zeile lauter Nullen.

«| Du meinst, das sei eine Art Grenzlinie wie die vertikale 2er-Spalte?

|» Ich weiß nicht, ob das eine Grenzlinie ist, aber dort macht etwas Anderes als lauter Nullen keinen Sinn. Ich sehe auf der rechten Seite ein mögliches Bildungsgesetz, analog dem auf der linken Seite: Alle einzelnen Glieder sind jeweils die Summe von 2 vorhergehenden Gliedern. Die Richtung geht diesmal aber nicht wie auf der linken Seite von oben nach unten sondern von links nach rechts. Das ist wirklich fantastisch!

0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10
1		0		0						
	1		1		2		5		14	
2		1		2		5		14		
	0		1		3		9		28	
2		0		1		4		14		
	0				1		5		20	
2						1		6		27
							1		7	
2								1		8
									1	
2										1

Tabelle 17b

«| Und ob! Ich bin schon dabei, die Tabelle auszufüllen ...

|» Und ich bin bereits am Nachrechnen ...

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10	−11	−12	−13
										1		0		0		0		0		0		0	
									1		1		1		2		5		14		42		132
								1		2		1		2		5		14		42		132	
							1		3		0		1		3		9		28		90		297
						1		4		2		0		1		4		14		48		165	
					1		5		5		0		0		1		5		20		75		275
				1		6		9		2		0		0		1		6		27		110	
			1		7		14		7		0		0		0		1		7		35		154
		1		8		20		16		2		0		0		0		1		8		44	
	1		9		27		30		9		0		0		0		0		1		9		54
1		10		35		50		25		2		0		0		0		0		1		10	

Tabelle 18

$$\Phi^5 = 11{,}0901699437494742410229341718 28$$

$$\Phi^5 = 11^1 + 1 \cdot 11^{-1} - 1 \cdot 11^{-3} + 2 \cdot 11^{-5} - 5 \cdot 11^{-7} + 14 \cdot 11^{-9} - 42 \cdot 11^{-11} + 132 \cdot 11^{-13} = 11{,}090169943749574188325066625 71$$

$$(\Phi^5)^2 = 122{,}991869381244216651252275890 11$$

$$(\Phi^5)^2 = 11^2 + 2 \cdot 11^0 - 1 \cdot 11^{-2} + 2 \cdot 11^{-4} - 5 \cdot 11^{-6} + 14 \cdot 11^{-8} - 42 \cdot 11^{-10} + 132 \cdot 11^{-12} = 122{,}991869381245316071575732882 81$$

$$(\Phi^5)^3 = 1.364{,}000733137435857404797968963$$

$$(\Phi^5)^3 = 11^3 + 3 \cdot 11^1 + 1 \cdot 11^{-3} - 3 \cdot 11^{-5} + 9 \cdot 11^{-7} - 28 \cdot 11^{-9} + 90 \cdot 11^{-11} - 297 \cdot 11^{-13} = 1.364{,}000733137438521017564791300 9$$

$$(\Phi^5)^4 = 15.126{,}999933893038648104029934484$$

$$(\Phi^5)^4 = 11^4 + 4 \cdot 11^2 + 2 \cdot 11^0 - 1 \cdot 11^{-4} + 4 \cdot 11^{-6} - 14 \cdot 11^{-8} + 48 \cdot 11^{-10} - 165 \cdot 11^{-12} = 15.126{,}999933893037184183017401511$$

Schaut bisher alles prima aus!

«| Mir fällt auf, dass auf der rechten Seite die hellgraue, mittelgraue und hellgrau gestrichelte Linie identische Werte aufweisen (wenn auch »versetzt«), ab der weißen gestrichelten Linie gibt es aber keine Entsprechung auf der rechten Seite.

|» Das stimmt. Wir sollten die weiße gestrichelte Linie wieder entfernen. Und außerdem sollten wir die Tabelle deutlich erweitern. Dadurch verschaffen wir uns einen besseren Überblick.

Ich habe die Tabelle 19 ohne Spaltenüberschriften dargestellt.

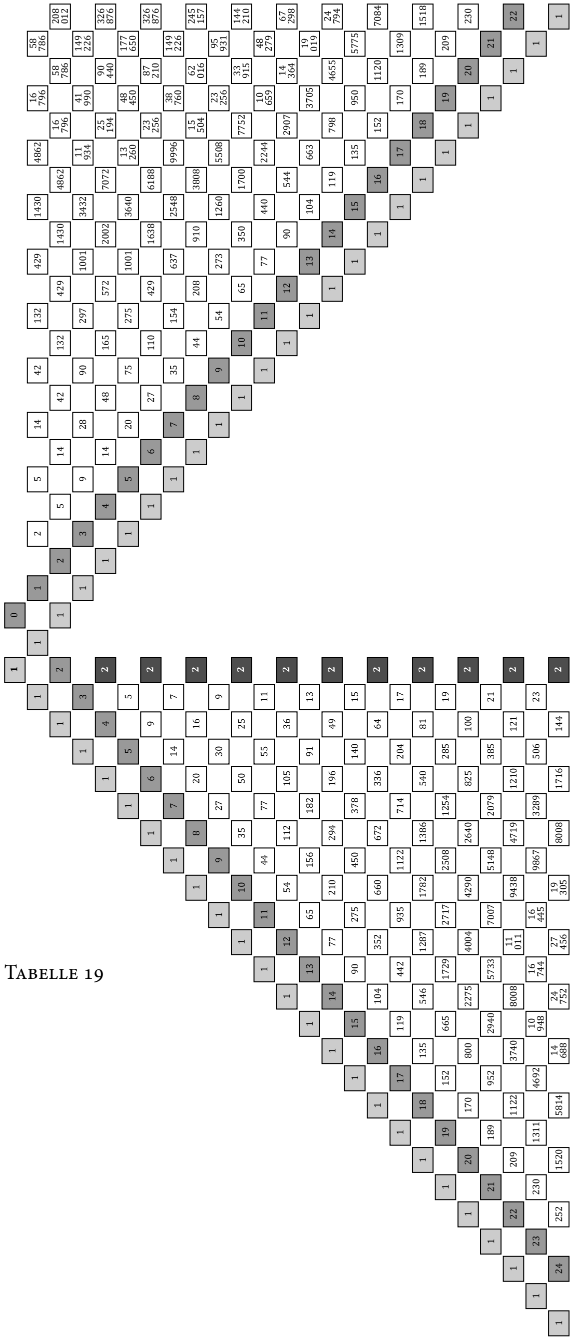


Tabelle 19

Auf der linken Seite haben wir bereits gesehen, dass die Summe der Zahlen in einer Zeile jeweils dem Wert von Φ^n entspricht, wobei *n* die Zeilennummer ist.

«| Gibt es eine solche Entsprechung auch auf der rechten Seite der Tabelle?

|» Probieren wir's aus. Wir sollten dazu aber die Zahlen nicht in den jeweiligen Zeilen addieren, sondern in den Spalten, da die »Wachstumsrichtung« auf der rechten Seite nicht nach unten, sondern nach rechts verläuft.

«| Ich bin schon gespannt!

	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10	−11	−12	−13
											126			
	1		0		0		0		0		0		0	
1		1		1		2		5		14		42		132
2	2		1		2		5		14		42		132	
3				1		3		9		28		90		297
4	2				1		4		14		48		165	
5						1		5		20		75		275
6	2						1		6		27		110	
7								1		7		35		154
8	2								1		8		44	
9										1		9		54
10	2										1		10	

Tabelle 20

|» Ich habe die Summe in der Spalte mit der Potenz –10 ausgerechnet: 1 + 8 + 27 + 48 + 42 + 0 = 126. Einen solchen Wert gibt es auf der linken Seite nicht. Allerdings haben wir auf der rechten Seite auch andere Faktoren als auf der linken. Rechne doch bitte in dieser kleinen Tabelle alle Spaltensummen aus, eventuell ist dadurch so etwas wie ein Trend erkennbar.

«| Gerne.

	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10	−11	−12	−13
		1	1	2	3	6	10	20	35	70	126	252	462	924
	1		0		0		0		0		0		0	
1		1		1		2		5		14		42		132
2	2		1		2		5		14		42		132	
3				1		3		9		28		90		297
4	2				1		4		14		48		165	
5						1		5		20		75		275
6	2						1		6		27		110	
7								1		7		35		154
8	2								1		8		44	
9										1		9		54
10	2										1		10	
11												1		11
12	2												1	
13														1

Tabelle 21

|» Hmmm ... irgendwie kommen mir diese Zahlen bekannt vor, aber ich weiß nicht, woher. Hast du eventuell dazu eine Idee?

«| Ja, und ob! Vor einiger Zeit habe ich in einem Buch etwas über das *Pascal'sche Dreieck*[1] gelesen. Da sind in der mittleren Spalte die gleichen Zahlen vorgekommen. Schau bitte nach, ich bin ziemlich sicher ...

|» Das könnte stimmen ... warte ... Treffer!

Dieses Pascal'sche Dreieck (Tabelle 22) ähnelt stark unserer eigenen Tabelle:

												1												
											1		1											
										1		2		1										
									1		3		3		1									
								1		4		6		4		1								
							1		5		10		10		5		1							
						1		6		15		20		15		6		1						
					1		7		21		35		35		21		7		1					
				1		8		28		56		70		56		28		8		1				
			1		9		36		84		126		126		84		36		9		1			
		1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1		
	1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1	
1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1

Tabelle 22

«| Wofür hat Pascal dieses Dreieck gebraucht?

1 https://de.wikipedia.org/wiki/Pascalsches_Dreieck

|» *Blaise Pascal*[1] konnte damit die sogenannten *Binomial-Koeffizienten*[2] sehr einfach bestimmen. Diese werden unter anderem in der *Kombinatorik*[3] gebraucht. Das Dreieck ist heute unter seinem Namen bekannt, er hat es jedoch nicht entdeckt oder erfunden. Die Binomial-Koeffizienten braucht man, um die Potenz eines Binoms[4] wie $(x+y)^n$ zu berechnen. Wenn du z. B. $n = 4$ setzt, dann kannst du $(x+y)^4$ auf folgende Weise berechnen:

$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

Die Binomial-Koeffizienten entsprechen in diesem Fall den Zahlen in der 4. Reihe des Pascal'schen Dreiecks.

1												
1	1											
1	2	1										
1	3	3	1									
1	4	6	4	1								
1	5	10	10	5	1							
1	6	15	20	15	6	1						
1	7	21	35	35	21	7	1					
1	8	28	56	70	56	28	8	1				
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Tabelle 23

Für die 5. Pozent lautet die entsprechende Formel:

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

1												
1	1											
1	2	1										
1	3	3	1									
1	4	6	4	1								
1	5	10	10	5	1							
1	6	15	20	15	6	1						
1	7	21	35	35	21	7	1					
1	8	28	56	70	56	28	8	1				
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Tabelle 24

1 Blaise Pascal, französischer Mathematiker, Physiker, Schriftsteller, Philosoph, * 19.06.1623, † 19.08.1662 https://de.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

2 https://de.wikipedia.org/wiki/Binomialkoeffizient

3 https://de.wikipedia.org/wiki/Kombinatorik

4 https://de.wikipedia.org/wiki/Binom

Für die 6. Potenz:

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

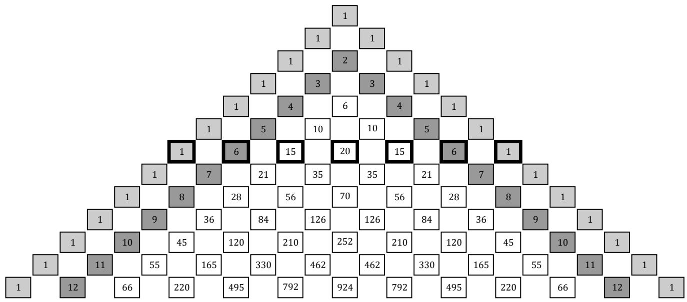


Tabelle 25

usw. ...

Eine der Eigenschaften des Pascal'schen Dreiecks ist, dass die Summe einer Zeile immer die *n*-te Potenz von 2 ist. Oder anders ausgedrückt: Die Zeilensumme verdoppelt sich mit jeder Zeile. Beispiel: Die Zeilensumme der Zeile 7 beträgt

$$1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7$$

und die Summe der Zeile 8 beträgt

$$1+8+28+56+70+56+28+8+1=256=2^8$$

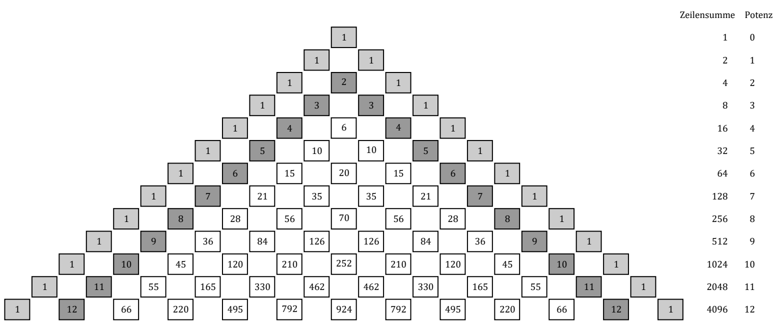


Tabelle 26

«| Ah, das ist im Grunde das Gleiche, das wir auch bei unserer Tabelle haben! Nur dass bei unserer Tabelle die Basis der Potenzen nicht 2 sondern Φ ist!

|» Genau! Die Zeilensumme der 7. Zeile im Pascal'schen Dreieck ist $2^7=128$, die Zeilensumme bei unserem Phi-Dreieck (ich gebe ihm hiermit offiziell diesen Namen!) ist $\Phi^7=29$.

Tabelle 27a

							Zeilensumme	Potenz
1							1	0
1							1	1
1	2						3	2
1	3						4	3
1	4	2					7	4
1	5	5					11	5
1	6	9	2				18	6
1	7	14	7				29	7
1	8	20	16	2			47	8
1	9	27	30	9			76	9
1	10	35	50	25	2		123	10
1	11	44	77	55	11		199	11
1	12	54	112	105	36	2	322	12

Zu beachten ist der Wert an der Spitze des Dreiecks. Die hellgraue Linie besteht durchgehend aus der Ziffer 1, während die dunkelgraue Linie durchgehend aus der Ziffer 2 besteht. Das ist jedoch kein Widerspruch, beide Werte sind richtig. In Tabelle 27b sehen wir die 1 an der Spitze. Sie ergibt sich, wenn wir die Folge der gerundeten Potenzen von Φ aufschreiben.

Tabelle 27b

							Zeilensumme	Potenz
1							**1**	**0**
1							1	1
1	2						3	2
1	3						4	3
1	4	2					7	4
1	5	5					11	5
1	6	9	2				18	6
1	7	14	7				29	7
1	8	20	16	2			47	8
1	9	27	30	9			76	9
1	10	35	50	25	2		123	10
1	11	44	77	55	11		199	11
1	12	54	112	105	36	2	322	12

Tabelle 27c

							Lucas-Folge
2							**2**
1							1
1	2						3
1	3						4
1	4	2					7
1	5	5					11
1	6	9	2				18
1	7	14	7				29
1	8	20	16	2			47
1	9	27	30	9			76
1	10	35	50	25	2		123
1	11	44	77	55	11		199
1	12	54	112	105	36	2	322

Verwenden wir den »dunkelgrauen« Wert 2, so entspricht dieser dem ersten Element der Lucas-Folge (Tabelle 27c).

«| Wir haben hier allerdings ein bisschen geschummelt!

|» Wieso?

«| Weil wir nur den ganzzahligen Teil von Φ genommen haben. Die Werte sind nur gerundet und nicht exakt!

|» Stimmt! Es fehlt der rechte Teil des Dreiecks. Wenn man die beiden Dreiecke (das Phi-Dreieck und das Pascal'sche) vergleicht, dann fällt sofort die »Optik« auf. Das Phi-Dreieck ist nur ein »halbes« Dreieck, es fehlt die rechte Hälfte.

«| Dann geben wir die rechte Hälfte doch dazu. Wir haben sie ja!

|» Ja, wir haben sie, aber sie passt nicht recht dazu ...

«| Dann machen wir sie eben passend!

|» Du meinst, wir drehen den rechten Teil um? ... Wir müssten dafür den rechten Teil (Tabelle 28a) »umklappen«. Er würde dann um seine hellgraue »1er-Linie« gespiegelt werden und die strichlierte »Null-Linie« würde nicht mehr nach rechts sondern parallel zur dunkelgrauen »2er-Linie« nach unten verlaufen (Tabelle 28b).

Tabelle 28a

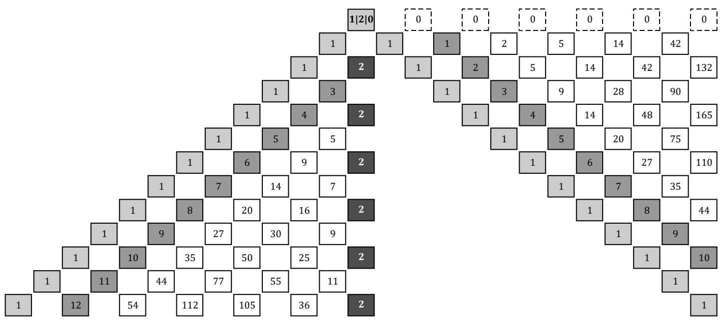
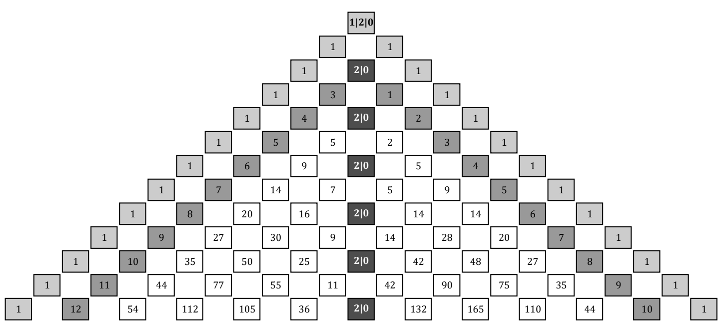


Tabelle 28b



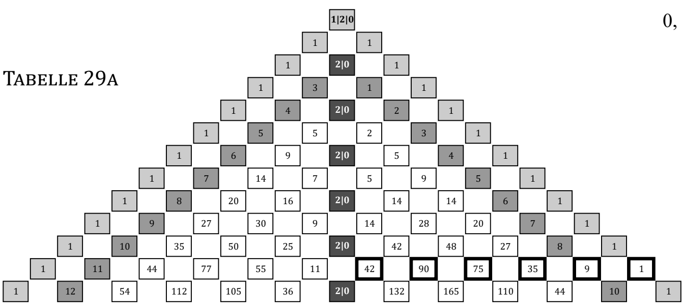
Die beiden mittleren vertikalen Linien (2er- und Nullerlinie) kommen nicht *neben*einander zu liegen sondern *über*einander. Die beiden Dreieckshälften sind etwas »ineinander verschoben«.

Die obere »Spitze« hat gleichzeitig drei Werte: 1, 2, und 0. Die vertikale Mittellinie hat in jeder zweiten Zeile immer gleichzeitig die Werte 2 und 0, je nachdem, welche der beiden Dreieckshälften man betrachtet. Die beiden Dreiecke sind entlang dieser »doppelten« vertikalen Linie »zusammengenäht«. Wenn ich zwei Stoff-Dreiecke an einer Seite zusammennähen will, dann muss ich die Seiten etwas übereinanderlegen, damit ich eine Naht anbringen kann ...

«| Du hast eine blühende Fantasie! Aber der Vergleich passt gut.

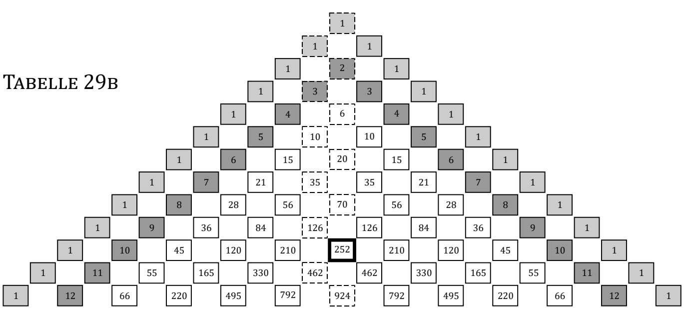
|» Die Zeilensummen, die dich auf die Idee gebracht hatten, unser Phi-Dreieck (Tabelle 29a) hätte eine Ähnlichkeit mit dem Pascal'schen Dreieck (Tabelle 29b), liegen jetzt »richtig«, nämlich horizontal:

Tabelle 29a



0, 1, 2 ?
1 = 1
1 = 1 + 0
2 = 1 + 1
3 = 1 + 2 + 0
6 = 1 + 3 + 2
10 = 1 + 4 + 5 + 0
20 = 1 + 5 + 9 + 5
35 = 1 + 6 + 14 + 14 + 0
70 = 1 + 7 + 20 + 28 + 14
126 = 1 + 8 + 27 + 48 + 42 + 0
$\boxed{252}$ = 1 + 9 + 35 + 75 + 90 + 42
462 = 1 + 10 + 44 + 110 + 165 + 132 + 0

Tabelle 29b



Im Grunde passt das Pascal'sche Dreieck wirklich gut zu unserem Phi-Dreieck. Beide Dreiecke werden von einer Rand-Reihe von gleichen Ziffern begrenzt. Das Pascal'sche Dreieck (das spiegelsymmetrisch ist) wird links und rechts jeweils mit einer Reihe von 1ern begrenzt. Das Phi-Dreieck besteht in Wahrheit aus zwei Dreiecken. Das eine Dreieck bildet die Faktoren für die positiven Potenzen von Φ, das andere Dreieck die Faktoren für die negativen Potenzen (Kehrwerte) von Φ. Die beiden Dreiecke stoßen an ihren Rändern aneinander bzw. überlappen sich dort mit jeweils einer ihrer äußersten Reihen (2er-Reihe bzw. 0er-Reihe).

Ich habe mich schon einige Male gefragt, was denn wohl »außerhalb« der Begrenzungsreihen liegt. Lauter Nuller? Möglicherweise. Eine befriedigende Antwort war das aber nicht.

Eine mögliche Antwort wäre ein weiteres Dreieck. Könnte das Pascal'sche Dreieck eventuell diese Aufgabe erfüllen?

«| Wir sollten das ausprobieren. Schlimmstenfalls funktioniert es nicht und wir vergessen diese Idee.

|» Das Pascalsche Dreieck wird auf beiden Seiten mit einer Reihe von 1ern begrenzt, das ist bei unserem kombinierten Dreieck ebenfalls der Fall. Wenn wir diese beiden Dreiecke sozusagen »Rücken an Rücken« aneinanderlegen, sodass jeweils die 1er-Reihen direkt aneinanderstoßen (bzw. sich überlappen), dann ergäbe das eine Art »geschlossenen Zahlenkreis«.

«| Ich denke, ich weiß, was du meinst. Ich zeichne das probehalber mal auf ... allerdings bekomme ich da ein Problem. Ich muss unsere Rechtecke mit den Zahlen nun jeweils in eine dreieckige Struktur pressen.

|» Versuch's mal mit sechseckigen »Waben«.

«| Gute Idee! Dadurch kann ich auch die leeren Zwischenräume zwischen den Rechtecken verschwinden lassen. Das Ergebnis sieht so aus (TABELLE 30):

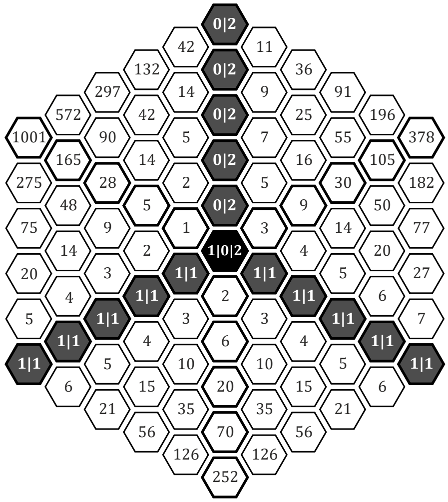


Tabelle 30

|» Das gefällt mir! Ich sehe, du hast das Pascal’sche Dreieck unten eingezeichnet und das Phi-Dreieck mit den positiven Potenzwerten rechts oben, das Dreieck mit den negativen Potenzwerten ist links oben.

«| Mir schien diese Anordnung sinnvoll. Das Pascal’sche Dreieck ist spiegelsymmetrisch, daher habe ich es an den unteren Rand gegeben. Und die positiven Potenzen sollte man besser rechts anordnen, da sie »aufsteigend« sind, die negativen sind nach links hin »fallend« – ähnlich wie in einem kartesischen Koordinatensystem, bzw. auf der »Zahlengeraden«.

|» Hast du die Richtigkeit der Anordnung der Zahlen überprüft? Mir erscheint diese etwas komisch.

«| Ich zeichne ein paar Pfeile ein, aus deren Richtung man erkennen kann, wie die Summen der einzelnen Zahlen zustande kommen (Tabelle 31):

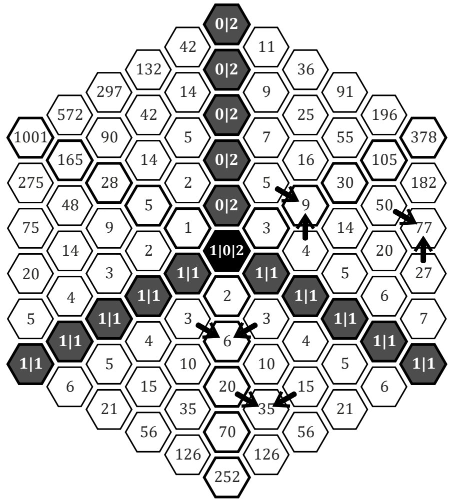


TABELLE 31

|» Bis hierher schaut alles prima aus. Ich fürchte jedoch, im linken oberen Drittel wirst du jetzt Schwierigkeiten bekommen.

«| Weshalb?

|» Weil 2 + 2 nicht 5 ergibt, und 3 + 5 ergibt nicht 9 ...

«| Wenn du genau hinsiehst, kannst du erkennen, dass wir beim Phi-Dreieck in den beiden Hälften die Summen auf unterschiedliche Weise erhalten haben. Auf der linken Seite haben wir die Summe jeweils aus der Zahl zwei Zeilen direkt darüber und der Zahl rechts oberhalb davon erhalten. Auf der rechten Seite hingegen haben wir jeweils die Zahlen links und rechts in der Zeile darüber zusammengezählt. In der TABELLE 32 habe ich die beiden Summier-Arten im Phi-Dreieck eingezeichnet.

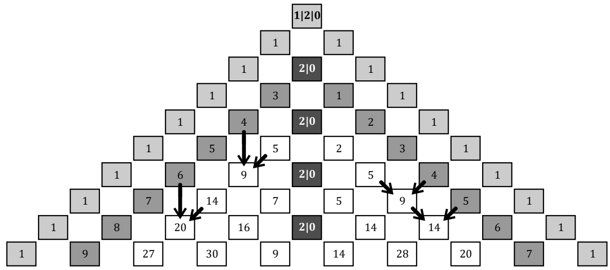


TABELLE 32

Dadurch ergibt sich in unserem »Dreiecks-Kreis« im linken oberen Drittel die Summenbildung auf folgende Weise:

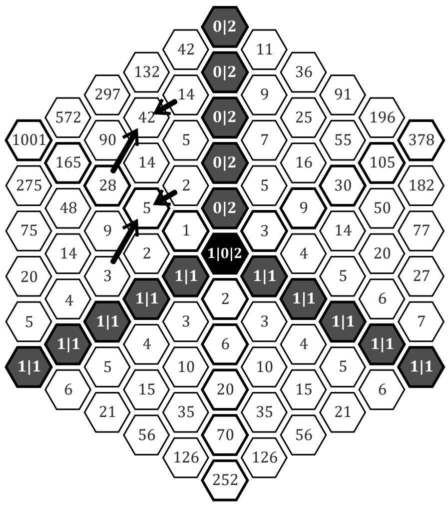


TABELLE 33

|» Im ersten Augenblick erscheint es etwas befremdlich, dass die Summenbildung so »schräg« erfolgt, aber deine Argumentation ist nachvollziehbar und natürlich richtig.

Da du diesen »Dreiecks-Kreis«, wie du ihn genannt hast, so schön gezeichnet hast – würdest du den Kreis ein wenig erweitern, damit wir etwas mehr »Spielraum« haben, um eventuelle Gesetzmäßigkeiten herauszufinden?

«| Gerne. Ich habe hiermit sogar die »Quadratur des Kreises« geschafft! :-)

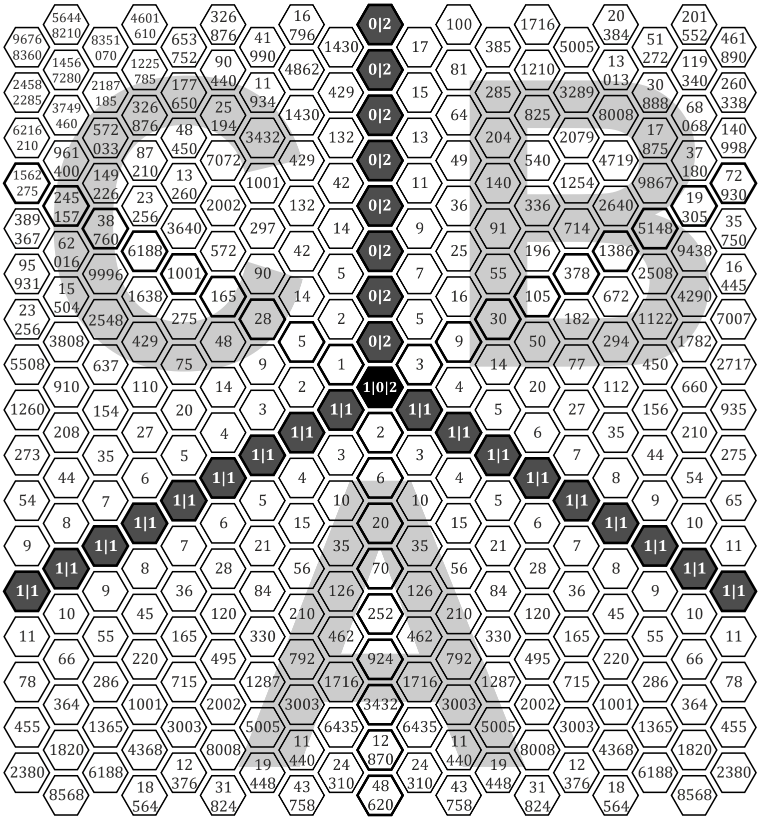


Tabelle 34

Und damit wir uns ab sofort mit der Beschreibung etwas leichter tun, habe ich den drei Sektoren im »quadratischen Kreis« die Buchstaben A, B, C zugeordnet. Wir können uns jetzt also auf den Weg machen und mögliche »Querverbindungen« zwischen den Sektoren aufspüren.

Eine erste Verbindung habe ich während des Zeichnens bereits herausgefunden. Sie wird dir bestimmt gefallen, denn sie betrifft gleich alle drei Sektoren!

|» Du machst mich neugierig!

«| Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Pascal’schen Dreieck (ab jetzt Sektor A genannt) und den Sektoren B und C:

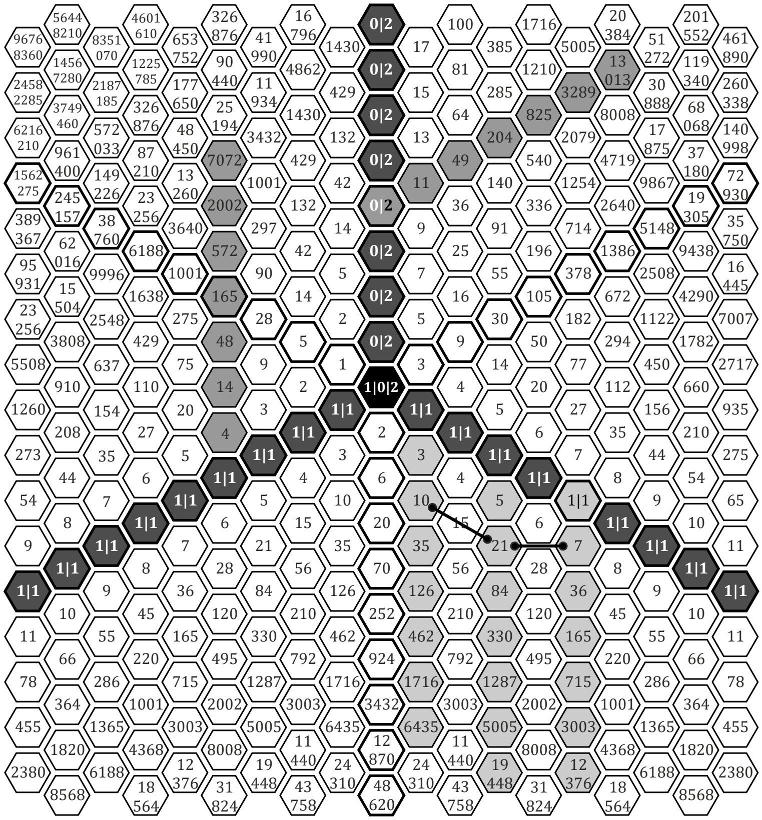


Tabelle 35

Im Sektor A habe ich drei vertikale Linien eingezeichnet. Diese haben einen Zusammenhang mit den etwas dunkler gezeichneten Linien in den anderen beiden Sektoren. Wenn du im Sektor A jeweils die Differenz zwischen einer Zahl in der mittleren Linie und der links »schräg darüber« benachbarten Zahl bildest, dann wird das Ergebnis jeweils in der im Sektor B eingezeichneten Linie sichtbar.

Gleiches können wir im Sektor A mit der mittleren und der rechts davon befindlichen Linie machen. Hier bilden wir die Differenz zwischen den auf gleicher Höhe stehenden Zahlen. Das Ergebnis ist in der Linie im Sektor C zu bewundern. Hier die zwei Listen mit den Differenzen:

Sektor A–B

$$\begin{array}{rrr}
5 - & 3 = & 2 \\
21 - & 10 = & 11 \\
84 - & 35 = & 49 \\
330 - & 126 = & 204 \\
1287 - & 462 = & 825 \\
5005 - & 1716 = & 3289 \\
19448 - & 6435 = & 13013 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Sektor A–C

$$\begin{array}{rrr}
5 - & 1 = & 4 \\
21 - & 7 = & 14 \\
84 - & 36 = & 48 \\
330 - & 165 = & 156 \\
1287 - & 715 = & 572 \\
5005 - & 3003 = & 2002 \\
19448 - & 12376 = & 7072 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

|» Schön! Wir können das Ergebnis aber *noch* schöner machen!

«| Wie denn?

|» Indem wir die Zahlen im Sektor C um die dortige »Mittelachse« (mit den dicker eingerahmten Sechsecken) spiegeln! Dann bilden die beiden Linien mit den Differenzen nämlich eine einzige fortlaufende Linie zwischen den Sektoren B und C. Mir würde das gut gefallen.

«| Mir auch! Ich hebe mir die Tabelle 35 aber für alle Fälle noch auf, bis wir endgültig wissen, wie sie »richtig« angeordnet werden muss. Das Hin- und Herschaufeln sämtlicher Zahlen ist nämlich eine Menge Arbeit ...

|» Lass dir Zeit, es eilt ja nicht. Vielleicht findest du dabei noch weitere Zusammenhänge heraus.

~~~ ~~~ Zwei Tage später ~~~ ~~~

«| Ich habe den Sektor C wie besprochen gespiegelt und den »quadratischen Dreieckskreis« ein wenig erweitert. Zusätzlich habe ich noch ein paar Pfeile eingezeichnet, aus deren Richtung man in jedem Sektor die Entstehung der Zahlen erkennen kann (Tabelle 36).

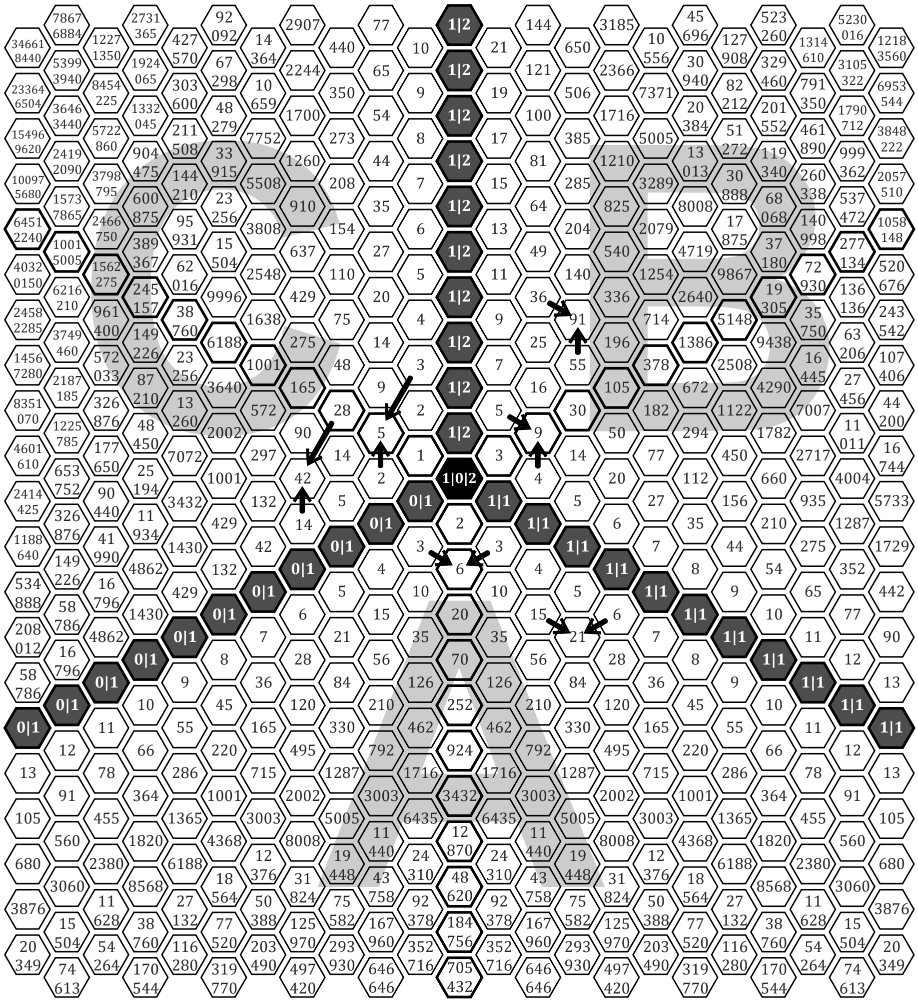
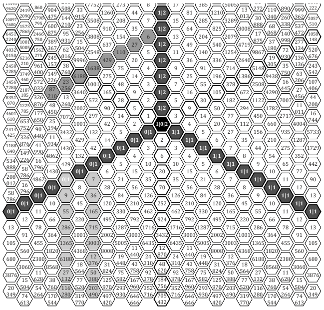


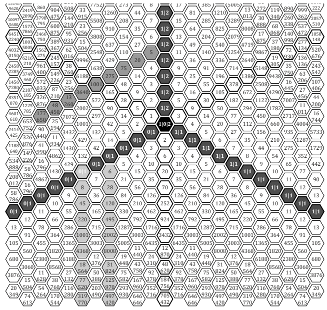
Tabelle 36

Im Folgenden werde ich die bereits gefundenen Differenz-Linien übersichtlich in kleinen Tabellen darstellen. Die »Bienenwaben« stelle ich verkleinert nebeneinander dar, auf diese Weise kann man den Zusammenhang bildlich leichter erkennen. Die Differenz der Zahlen liste ich auf den folgenden Seiten gesondert auf.

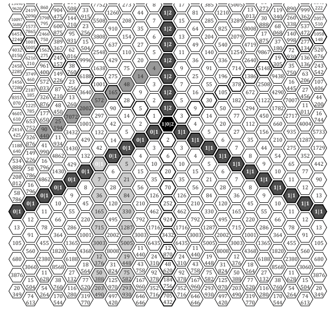
Ich beginne mit den Differenzlinien in den Sektoren A–C (Tabelle 37). Man erkennt gut, dass im Sektor C die Linie von oben nach unten und anschließend wieder zurück wandert, während gleichzeitig die Linien im Sektor A von links nach rechts durchwandern – die Symmetrie im Sektor A macht das möglich.



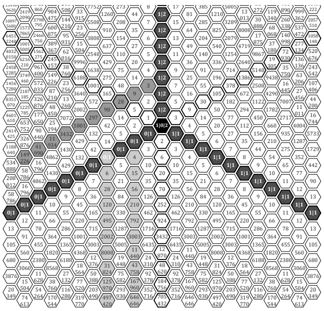
A



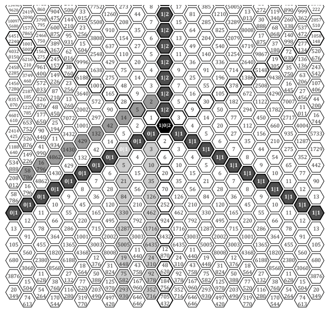
B



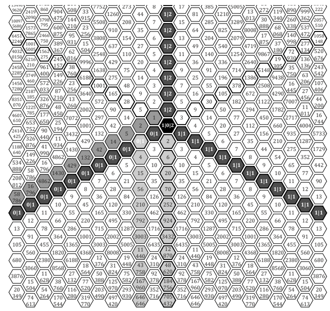
C



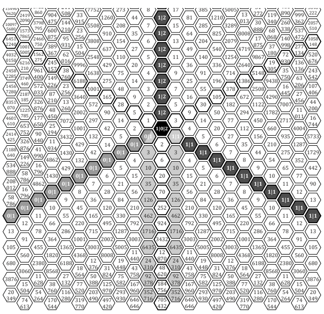
D



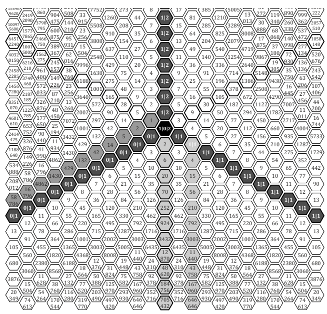
E



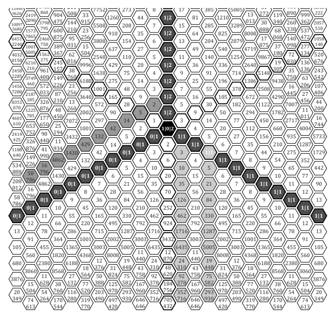
F



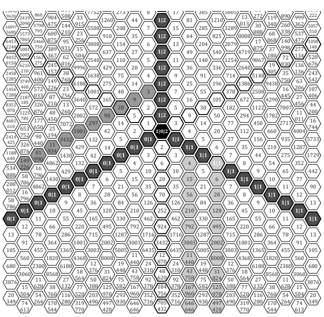
G



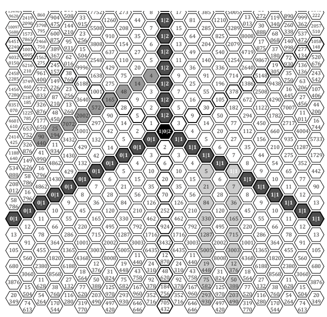
H



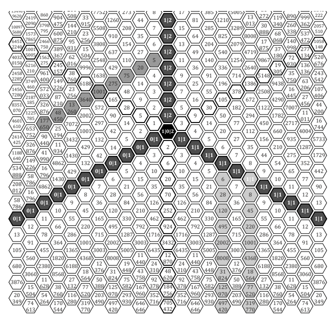
I



J



K



L

Tabelle 37

$$\begin{array}{rrr}
1 - & 7 = & -6 \\
9 - & 36 = & -27 \\
55 - & 165 = & -110 \\
286 - & 715 = & -429 \\
1365 - & 3003 = & -1638 \\
6188 - & 12376 = & -6188 \\
27132 - & 50388 = & -23256 \\
116280 - & 203490 = & -87210 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

A

$$\begin{array}{rrr}
1 - & 5 = & -4 \\
7 - & 21 = & -14 \\
36 - & 84 = & -48 \\
165 - & 330 = & -165 \\
715 - & 1287 = & -572 \\
3003 - & 5005 = & -2002 \\
12376 - & 19448 = & -7072 \\
50388 - & 75582 = & -25194 \\
203490 - & 293930 = & -90440 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

B

$$\begin{array}{rrr}
1 - & 4 = & -3 \\
6 - & 15 = & -9 \\
28 - & 56 = & -28 \\
120 - & 210 = & -90 \\
495 - & 792 = & -297 \\
2002 - & 3003 = & -1001 \\
8008 - & 11440 = & -3432 \\
31824 - & 43758 = & -11934 \\
125970 - & 167960 = & -41990 \\
497420 - & 646646 = & -149226 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

C

$$\begin{array}{rrr}
1 - & 3 = & -2 \\
5 - & 10 = & -5 \\
21 - & 35 = & -14 \\
84 - & 126 = & -42 \\
330 - & 462 = & -132 \\
1287 - & 1716 = & -429 \\
5005 - & 6435 = & -1430 \\
19448 - & 24310 = & -4862 \\
75582 - & 92378 = & -16796 \\
293930 - & 352716 = & -58786 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

D

$$\begin{array}{rrr}
1 - & 2 = & -1 \\
4 - & 6 = & -2 \\
15 - & 20 = & -5 \\
56 - & 70 = & -14 \\
210 - & 252 = & -42 \\
792 - & 924 = & -132 \\
3003 - & 3432 = & -429 \\
11440 - & 12870 = & -1430 \\
43758 - & 48620 = & -4862 \\
167960 - & 184756 = & -16796 \\
646646 - & 705432 = & -58786 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

E

$$\begin{array}{rrr}
1 - & 1 = & 0 \\
4 - & 4 = & 0 \\
15 - & 15 = & 0 \\
56 - & 56 = & 0 \\
210 - & 210 = & 0 \\
792 - & 792 = & 0 \\
3003 - & 3003 = & 0 \\
11440 - & 11440 = & 0 \\
43758 - & 43758 = & 0 \\
167960 - & 167960 = & 0 \\
646646 - & 646646 = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

F

$$\begin{array}{rrr}
2 - & 1 = & 1 \\
6 - & 4 = & 2 \\
20 - & 15 = & 5 \\
70 - & 56 = & 14 \\
252 - & 210 = & 42 \\
924 - & 792 = & 132 \\
3432 - & 3003 = & 429 \\
12870 - & 11440 = & 1430 \\
48620 - & 43758 = & 4862 \\
184756 - & 167960 = & 16796 \\
705432 - & 646646 = & 58786 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

G

Die Differenz-Listen zu H–L ergeben sich automatisch – sie verlaufen lediglich »in umgekehrter Richtung« und bekommen daher in den Ergebnissen statt eines Minus ein Plus als Vorzeichen.

Kommen wir nun zur »Verlängerung« der Linien vom Sektor C direkt hinüber in den Sektor B:

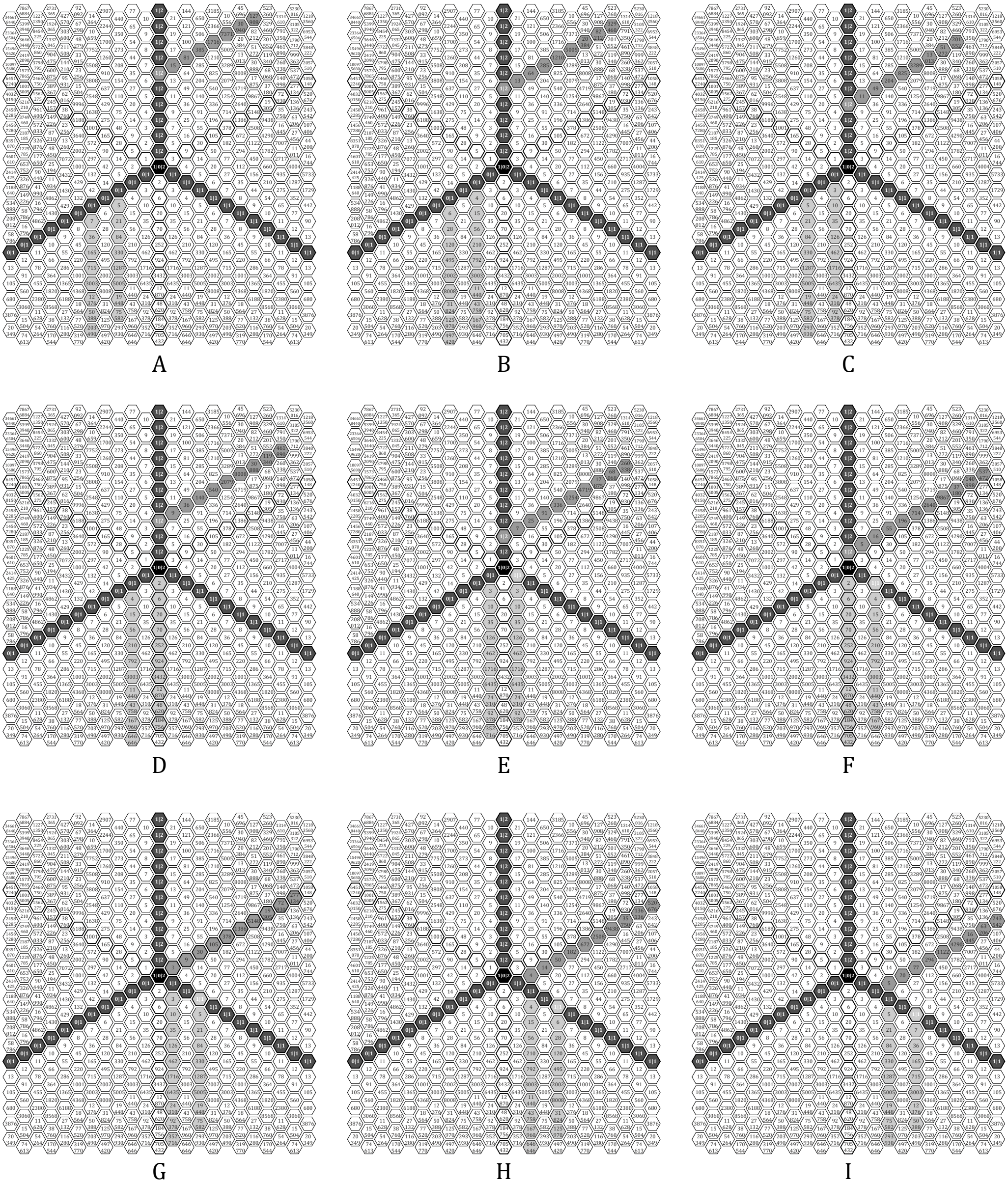


Tabelle 38

Wir sehen, dass im Sektor A die Linien wie vorhin von links nach rechts wandern, allerdings um eine »Wabenhöhe« zueinander versetzt. In Tabelle 39 kann man den Unterschied gut erkennen:

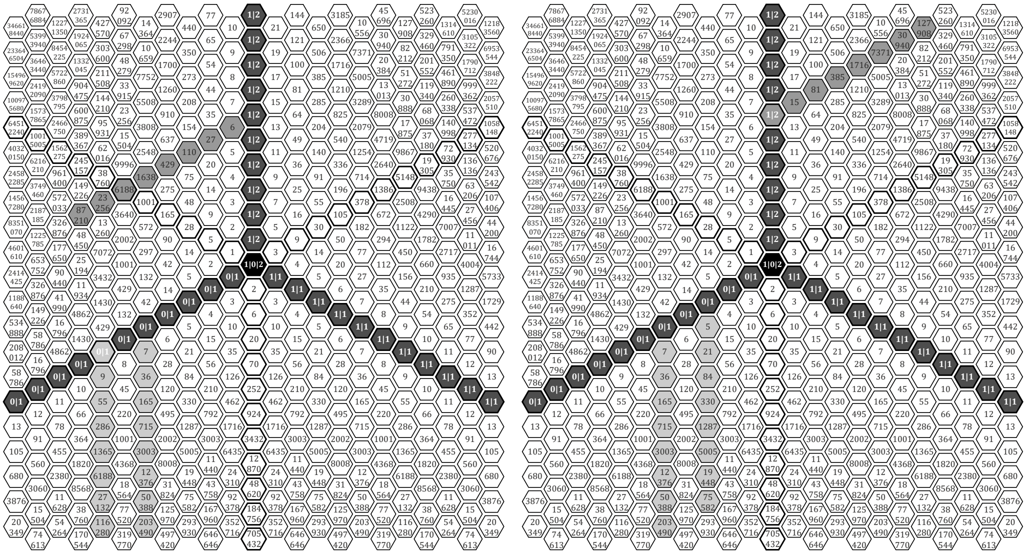


Tabelle 39

Verfolgt man in Tabelle 38 den »Fortschritt« der Linie in Sektor B, scheint es, dass ab Station »F« die beiden Linien im Sektor A nur mehr am unteren Ende einen Versatz aufweisen. Wo ist dieser am oberen Ende geblieben? Das Rätsel kann leicht gelöst werden, indem wir die zugehörige Differenzenliste betrachten:

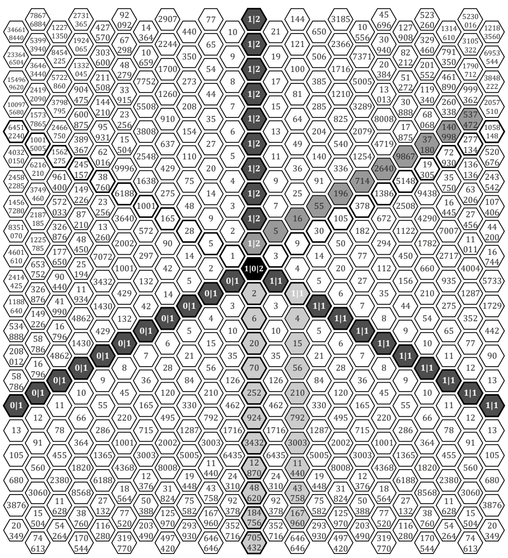


Tabelle 40

$$
\begin{aligned}
2 &- 0 = 2\\
6 &- 1 = 5\\
20 &- 4 = 16\\
70 &- 15 = 55\\
252 &- 56 = 196\\
924 &- 210 = 714\\
3432 &- 792 = 2640\\
12870 &- 3003 = 9867\\
48620 &- 11440 = 37180\\
184756 &- 43758 = 140998\\
705432 &- 167960 = 537472\\
\vdots\; &\quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Die 0 in der ersten Zeile (2 – 0 = 2) ist unsichtbar!

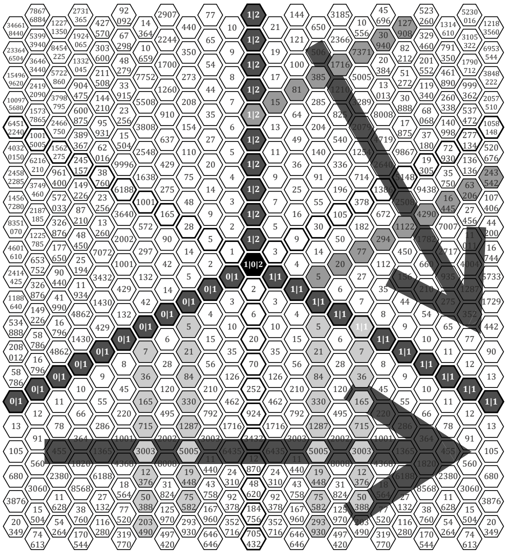


Tabelle 41

Die »wandernde Linie« im Sektor B wird nicht an einer Grenzlinie »reflektiert« (wie das im Sektor C der Fall ist), sondern läuft ungehindert nach rechts unten weiter – es gibt hier (genauso wie im Sektor A) keine »Randlinie«, an welcher eine Reflexion auftreten könnte.

|» Was mich brennend interessieren würde: Wir haben nun in allen Sektoren »Differenzlinien« gefunden. Die Zahlen in den Sektoren werden aber durch eine *Summen*bildung erzeugt ...

«| Du meinst, ob es auch in gleicher Weise »Summenlinien« zu finden gibt? Die Antwort ist: Ja! Zwischen den Sektoren A und B gibt es einen sehr schönen Summen-Zusammenhang – als Beispiel möge die Tabelle 42 dienen:

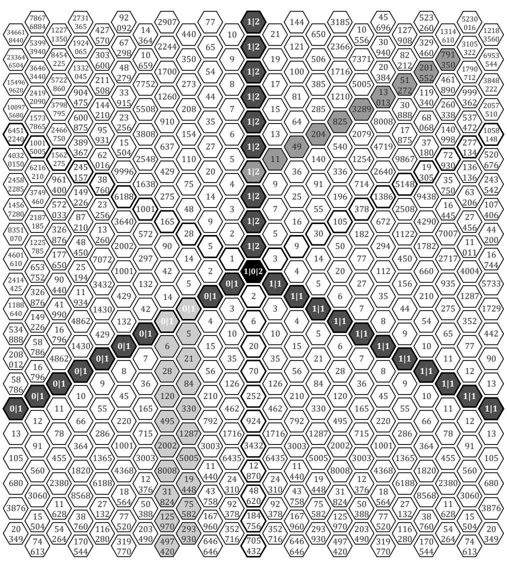


Tabelle 42

$$
\begin{array}{rcrcr}
1 & + & 1 & = & 2 \\
6 & + & 5 & = & 11 \\
28 & + & 21 & = & 49 \\
120 & + & 84 & = & 204 \\
495 & + & 330 & = & 825 \\
2002 & + & 1287 & = & 3289 \\
8008 & + & 5005 & = & 13013 \\
31824 & + & 19448 & = & 51272 \\
125970 & + & 75582 & = & 201552 \\
497420 & + & 293930 & = & 791350 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Die beiden Linien, welche die zu addierenden Zahlen liefern, liegen im Sektor A vertikal nebeneinander – der Unterschied zu den Differenzlinien besteht darin, dass zwischen den beiden Linien *kein Abstand* ist.

Die »Laufrichtung« der Linien ist identisch mit jener in der Tabelle 41. Zwischen den Sektoren A und C habe ich bisher keinen Summen-Zusammenhang gefunden. Tabelle 43 lässt den Verlauf der Summenlinien erkennen:

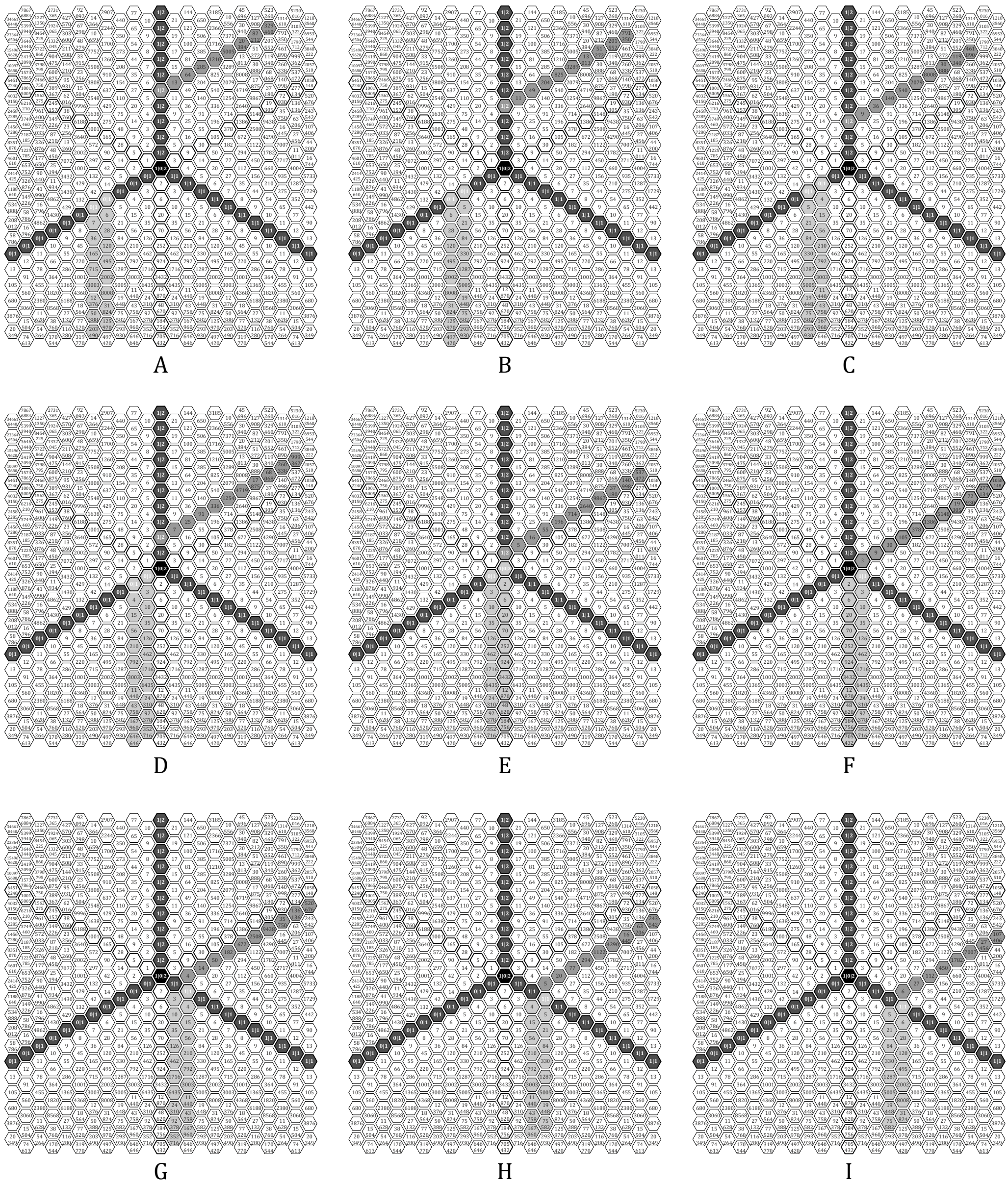


Tabelle 43

|» Was jetzt noch fein wäre: ein Summen-Zusammenhang zwischen den Sektoren B und C. Hat deine Spürnase diesbezüglich etwas finden können?

«| Sie hat! Allerdings in etwas anderer Form, als ich mir das ursprünglich vorgestellt hatte. Ich habe zwischen den beiden Sektoren nämlich einen Zusammenhang zwischen Differenz- und Summenlinien gefunden! Die TABELLE 44 zeigt dir, wie das zustande kommt:

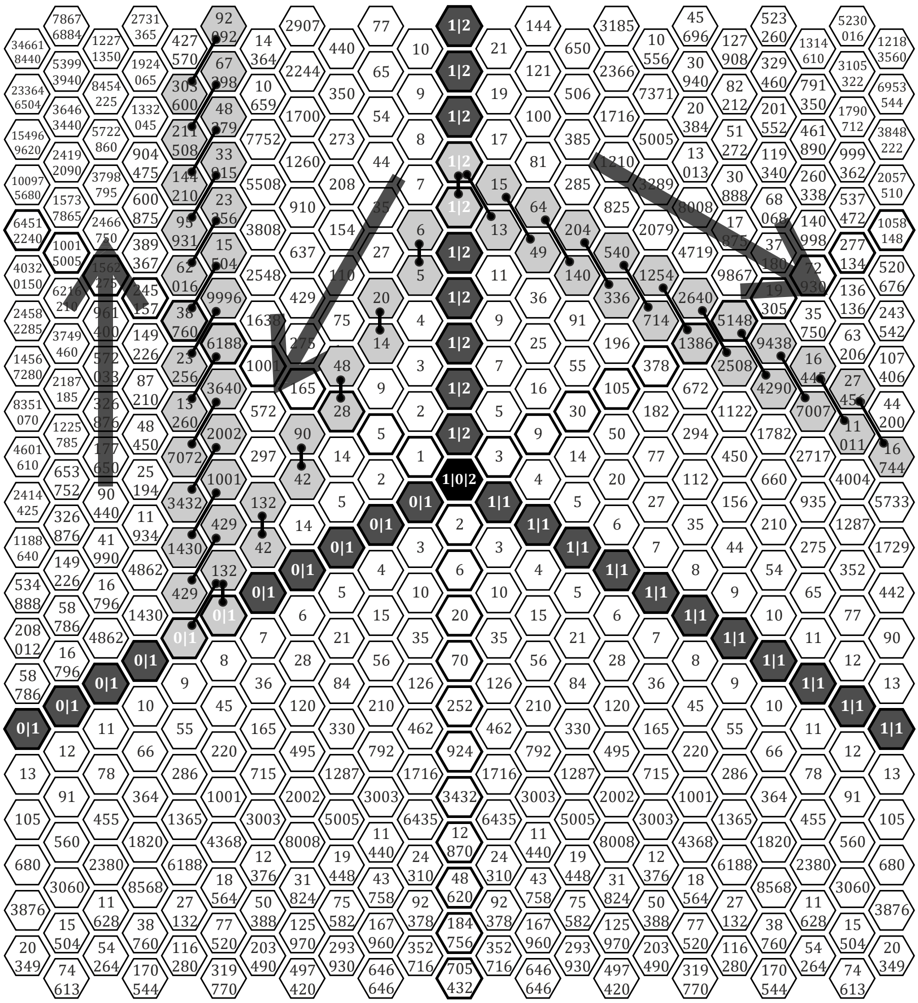


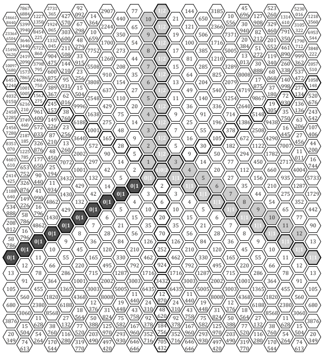
TABELLE 44

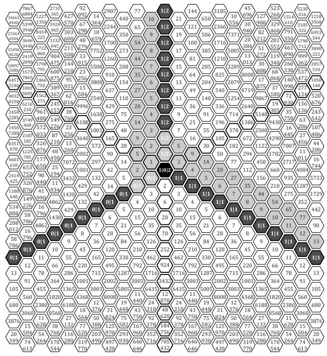
Es gibt in beiden Sektoren jeweils Linien, die aus »Zahlen-Pärchen« bestehen. Die *Differenz* zwischen den Zahlen-Pärchen in Sektor B entspricht jeweils der *Summe* eines Zahlenpärchens in Sektor C. In der TABELLE 44 habe ich die Pärchen »zusammengenäht«, damit man sieht, welche Zahlen Paare bilden. Das wirklich Spannende dabei ist, dass es aussieht, als handle es sich um einen einzigen »Strahl«, der zweimal »umgelenkt« bzw. »gespiegelt« wird. Wenn man genauer hinsieht, bemerkt man aber, dass es sich um zwei Linien handelt, die den gleichen Ursprung genau an der Grenzlinie zwischen B und C haben. Um das Ganze anschaulicher zu machen, habe ich eine Liste mit den »Differenz-Summen« erstellt:

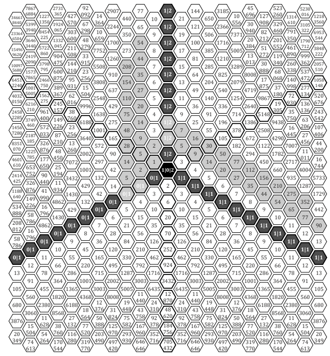
0 −	2 =	−2 = −(	1 +	1)
2 −	13 =	−11 = −(	5 +	6)
15 −	49 =	−34 = −(	14 +	20)
64 −	140 =	−76 = −(	28 +	48)
204 −	336 =	−132 = −(	42 +	90)
540 −	714 =	−174 = −(	42 +	132)
1254 −	1386 =	−132 = −(	0 +	132)
2640 −	2508 =	132 = (	132 +	0)
5148 −	4290 =	858 = (	429 +	429)
9438 −	7007 =	2431 = (	1430 +	1001)
16445 −	11011 =	5434 = (	3432 +	2002)
27456 −	16744 =	10712 = (	7072 +	3640)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

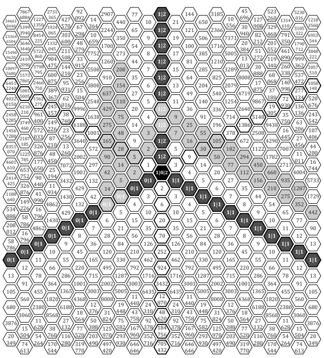
Im Sektor C verläuft die Linie mit den Summen-Pärchen erst mal *horizontal* bis zur gegenüberliegenden Randlinie »0«. Dort wird sie gespiegelt und verläuft ab hier parallel zur Randlinie »1« weiter ins Unendliche. Ich habe den ersten Teil der Strecke ganz bewusst als *horizontal* bezeichnet, denn die drei Sektoren kennen in Wahrheit kein »oben« oder »unten«. Wir betrachten im Sektor A die Linie 1–7–21–35–35–21–7–1 als horizontal – und wenn wir den gesamten »Dreieckskreis« um 120° gegen den Uhrzeigersinn drehen, dann liegt anschließend die Linie 1–6–20–48–90–132–132–0 ebenfalls horizontal an der gleichen Stelle.

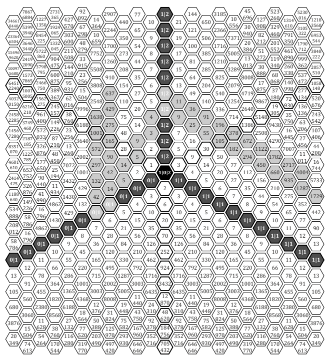
Die Spiegelung an der »0«-Linie des Sektors C erfolgt bei jenem Zahlenpärchen (0 + 132), das in der Differenz-Summen-Liste am Übergang zwischen grauem und weißem Hintergrund steht. Im Sektor B überspringt das Pärchen, das als erstes die »weiße Zone« betritt (2640 – 2508), an dieser Stelle die Mittellinie im Sektor (Linie der Waben mit dickem Rand). Genau dort wechselt auch das Vorzeichen der Summe/Differenz.

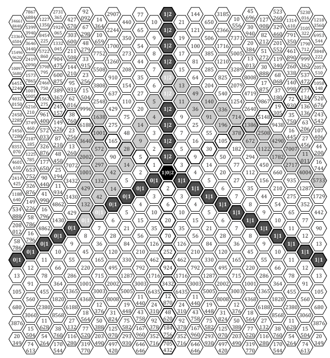

A

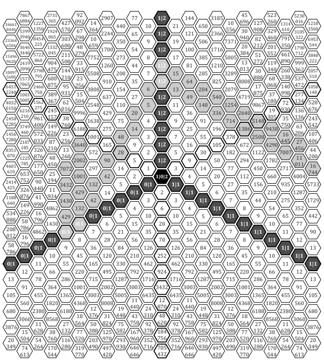

B

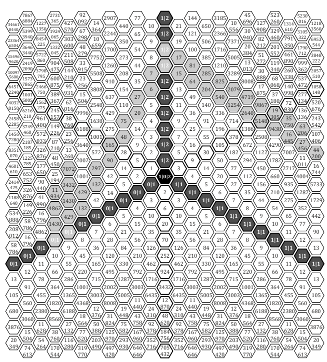

C


D


E


F


G


H

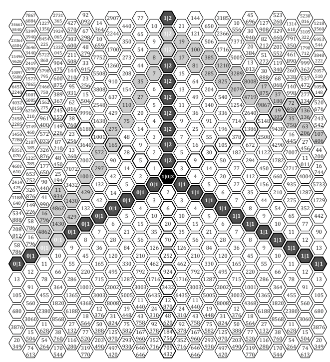

I

TABELLE 45

Die TABELLE 45 und die zugehörigen Summen-/Differenz-Listen lassen den Verlauf der Linien sowie die »Zahlenpärchen« gut erkennen.

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	1 =	1 =	(1 + 0)
3 −	1 =	2 =	(0 + 2)
4 −	1 =	3 =	(2 + 1)
5 −	1 =	4 =	(3 + 1)
6 −	1 =	5 =	(4 + 1)
7 −	1 =	6 =	(5 + 1)
8 −	1 =	7 =	(6 + 1)
9 −	1 =	8 =	(7 + 1)
10 −	1 =	9 =	(8 + 1)
11 −	1 =	10 =	(9 + 1)
12 −	1 =	11 =	(10 + 1)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

A

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	3 =	−1 =	−(0 + 1)
5 −	4 =	2 =	(2 + 0)
9 −	5 =	4 =	(2 + 2)
14 −	6 =	8 =	(5 + 3)
20 −	7 =	13 =	(9 + 4)
27 −	8 =	19 =	(14 + 5)
35 −	9 =	26 =	(20 + 6)
44 −	10 =	34 =	(27 + 7)
54 −	11 =	43 =	(35 + 8)
65 −	12 =	53 =	(44 + 9)
77 −	13 =	64 =	(54 + 10)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

B

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	5 =	−3 =	−(1 + 2)
7 −	9 =	−2 =	−(0 + 2)
16 −	14 =	2 =	(2 + 0)
30 −	20 =	10 =	(5 + 5)
50 −	27 =	23 =	(14 + 9)
77 −	35 =	42 =	(28 + 14)
112 −	44 =	68 =	(48 + 20)
156 −	54 =	102 =	(75 + 27)
210 −	65 =	145 =	(110 + 35)
275 −	77 =	198 =	(154 + 44)
352 −	90 =	262 =	(208 + 54)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

C

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	7 =	−5 =	−(2 + 3)
9 −	16 =	−7 =	−(2 + 5)
25 −	30 =	−5 =	−(0 + 5)
55 −	50 =	5 =	(5 + 0)
105 −	77 =	28 =	(14 + 14)
182 −	112 =	70 =	(42 + 28)
294 −	156 =	138 =	(90 + 48)
450 −	210 =	240 =	(165 + 75)
660 −	275 =	385 =	(275 + 110)
935 −	352 =	583 =	(429 + 154)
1287 −	442 =	845 =	(637 + 208)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

D

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	9 =	−7 =	−(3 + 4)
11 −	25 =	−14 =	−(5 + 9)
36 −	55 =	−19 =	−(5 + 14)
91 −	105 =	−14 =	−(0 + 14)
196 −	182 =	14 =	(14 + 0)
378 −	294 =	84 =	(42 + 42)
672 −	450 =	222 =	(132 + 90)
1122 −	660 =	462 =	(297 + 165)
1782 −	935 =	847 =	(572 + 275)
2717 −	1287 =	1430 =	(1001 + 429)
4004 −	1729 =	2275 =	(1638 + 637)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

E

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	11 =	−9 =	−(4 + 5)
13 −	36 =	−23 =	−(9 + 14)
49 −	91 =	−42 =	−(14 + 28)
140 −	196 =	−56 =	−(14 + 42)
336 −	378 =	−42 =	−(0 + 42)
714 −	672 =	42 =	(42 + 0)
1386 −	1122 =	264 =	(132 + 132)
2508 −	1782 =	726 =	(429 + 297)
4290 −	2717 =	1573 =	(1001 + 572)
7007 −	4004 =	3003 =	(2002 + 1001)
11011 −	5733 =	5278 =	(3640 + 1638)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

F

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	13 =	−11 =	−(5 + 6)
15 −	49 =	−34 =	−(14 + 20)
64 −	140 =	−76 =	−(28 + 48)
204 −	336 =	−132 =	−(42 + 90)
540 −	714 =	−174 =	−(42 + 132)
1254 −	1386 =	−132 =	−(0 + 132)
2640 −	2508 =	132 =	(132 + 0)
5148 −	4290 =	858 =	(429 + 429)
9438 −	7007 =	2431 =	(1430 + 1001)
16445 −	11011 =	5434 =	(3432 + 2002)
27456 −	16744 =	10712 =	(7072 + 3640)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

G

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	15 =	−13 =	−(6 + 7)
17 −	64 =	−47 =	−(20 + 27)
81 −	204 =	−123 =	−(48 + 75)
285 −	540 =	−255 =	−(90 + 165)
825 −	1254 =	−429 =	−(132 + 297)
2079 −	2640 =	−561 =	−(132 + 429)
4719 −	5148 =	−429 =	−(0 + 429)
9867 −	9438 =	429 =	(429 + 0)
19305 −	16445 =	2860 =	(1430 + 1430)
35750 −	27456 =	8294 =	(3432 + 4862)
63206 −	44200 =	19006 =	(7072 + 11934)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

H

0 −	2 =	−2 =	−(1 + 1)
2 −	17 =	−15 =	−(7 + 8)
19 −	81 =	−62 =	−(27 + 35)
100 −	285 =	−185 =	−(75 + 110)
385 −	825 =	−440 =	−(165 + 275)
1210 −	2079 =	−869 =	−(297 + 572)
3289 −	4719 =	−1430 =	−(429 + 1001)
8008 −	9867 =	−1859 =	−(429 + 1430)
17875 −	19305 =	−1430 =	−(0 + 1430)
37180 −	35750 =	1430 =	(1430 + 0)
72930 −	63206 =	9724 =	(4862 + 4862)
136136 −	107406 =	28730 =	(11934 + 16796)
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮

I

|» Im Sektor C gibt es immer noch ein »Problem«, das mir nicht aus dem Kopf gehen will ... Wir haben dort nämlich ein Loch in der Zahlenfläche.

«| Ein Loch??

|» Ja. Wir haben dort eine Zahl hingeschrieben, die in Wahrheit gar nicht da ist. Wenn wir die Entstehung des »Zahlenteppichs« betrachten, dann sehen wir, dass wir jeweils zwei nebeneinander liegende Zahlen addiert und anschließend die Summe eine Zeile darunter hingeschrieben haben – und zwar in die Mitte zwischen den beiden Zahlen, deren Summe wir gebildet haben. Im Sektor A (dem Pascal'schen Dreieck) sind die Zahlen symmetrisch um die Mittelachse angeordnet. Daher ergibt sich ein schön regelmäßig »nach unten fließendes« Muster. Hier zur Erinnerung nochmal die Pfeile, die wir bereits in die TABELLE 36 eingezeichnet hatten:

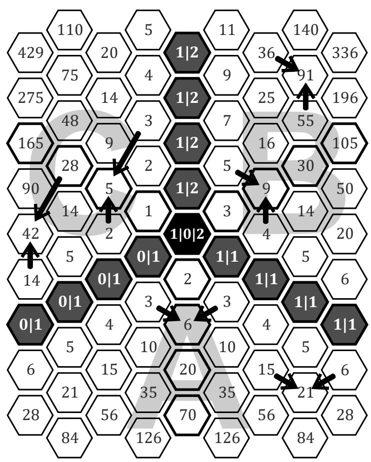


TABELLE 46

Das gleiche Muster sehen wir im Sektor B. Wenn wir die wabenförmige Tabelle um 120° im Uhrzeigersinn drehen, dann kommen die Zahlen 4 und 5 (mit der Summe 9) im Sektor C an der gleichen Stelle zu liegen wie vorher die Zahlen 3 und 3 (mit der Summe 6) im Sektor A:

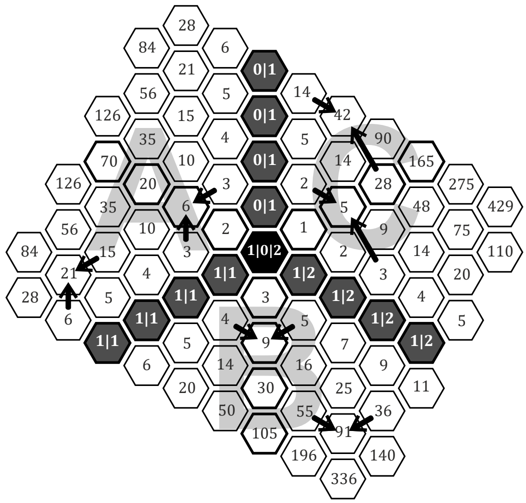


TABELLE 47

Im Sektor C haben wir jedoch eine »verschobene« Summenbildung. Ich drehe die Waben um weitere 120°, dann sieht man es besser:

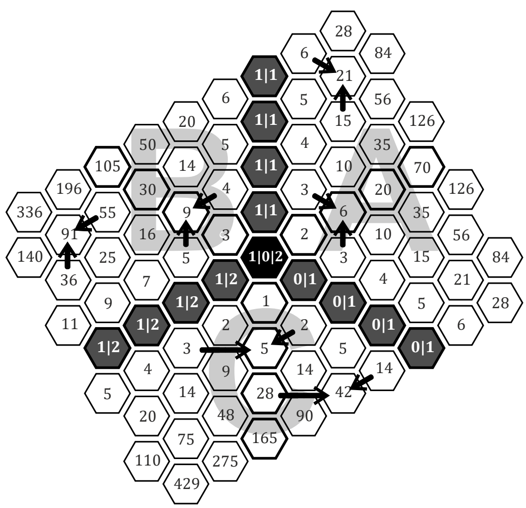


TABELLE 48

Der Sektor C ist begrenzt von Randlinien, die auf der einen Seite aus einer Reihe mit der Zahl 2 und auf der anderen Seite aus einer Reihe mit der Zahl 0 bestehen.

Würden wir die Zahlen im Sektor C auf gleiche Weise wie in den Sektoren A und B addieren, so ergäbe sich folgendes Muster:

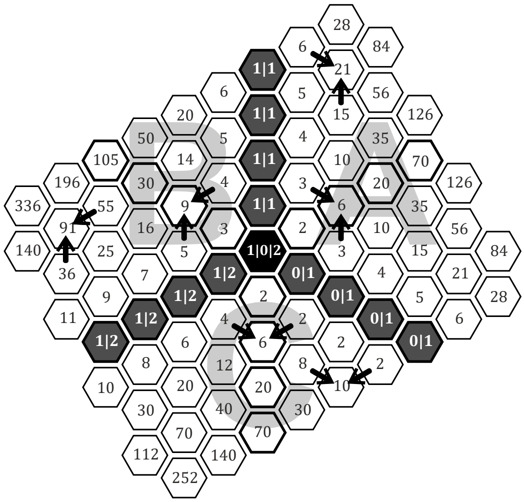


TABELLE 49

Bei genauem Hinschauen stellt sich heraus, dass das auf diese Weise entstehende Zahlendreieck ein symmetrisches wäre, ähnlich dem Pascal'schen Dreieck im Sektor A. Das Dreieck wäre links und rechts begrenzt mit einer Reihe von 2ern. Zur besseren Veranschaulichung ändere ich die Einfärbung:

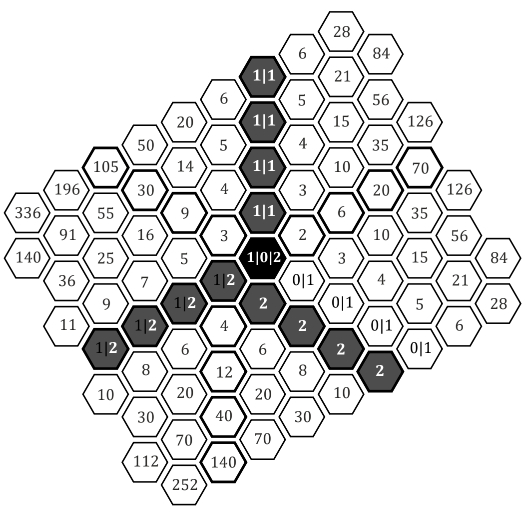


TABELLE 50

Der Sektor C besteht aus den Zahlen, welche die Faktoren für die Potenzreihe des Nachkomma-Teils von Φ bilden. Und die Entstehung dieser Zahlenreihe hat einen *nicht-symmetrischen* Ursprung. Streng genommen kennen wir diesen Ursprung gar nicht, denn er liegt irgendwo im unendlich Kleinen.

Erinnern wir uns an die Quadrate, die wir gezeichnet haben, um die Verhältniszahl Φ auf geometrische Weise darzustellen. Diese haben so ausgesehen:

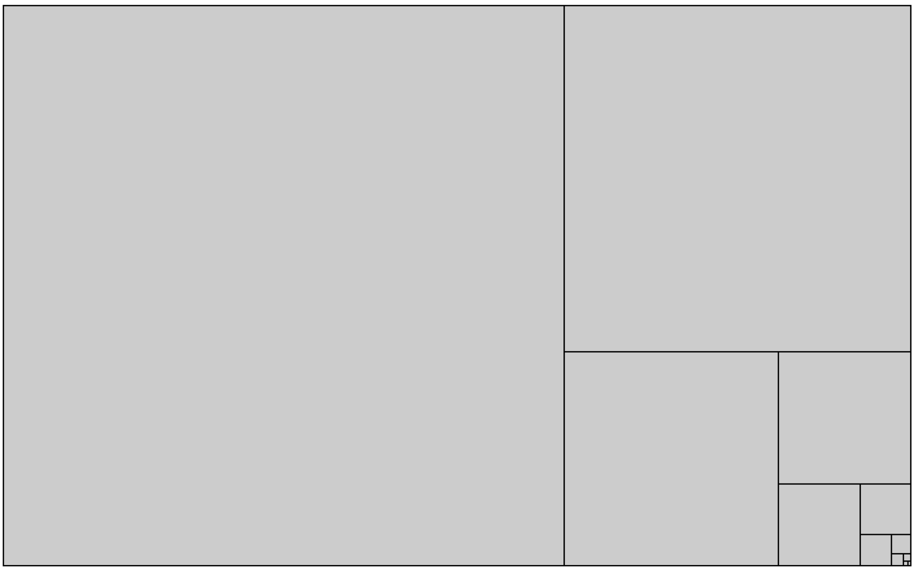


Bild 11

In der Richtung nach rechts unten werden die Quadrate immer kleiner (im Verhältnis 1 : Φ), es bleibt aber immer ein restliches »Loch«, in welches man weitere, noch kleinere Quadrate einzeichnen könnte.

Umgekehrt betrachtet: Die Quadrate werden, von diesem winzigen »Loch« ausgehend, in Richtung nach links oben um den Faktor Φ immer größer. Die immer größer werdenden Quadrate entstehen auf die gleiche Weise wie die Zahlen in unseren Dreieckstabellen. Und die beiden Tabellen, welche die Faktoren für die vollständige Zahl Φ liefern, haben genauso ein »Loch« an ihrem Ursprung! Zeichnen wir die Tabellen nochmal in ihrer ursprünglichen Form auf:

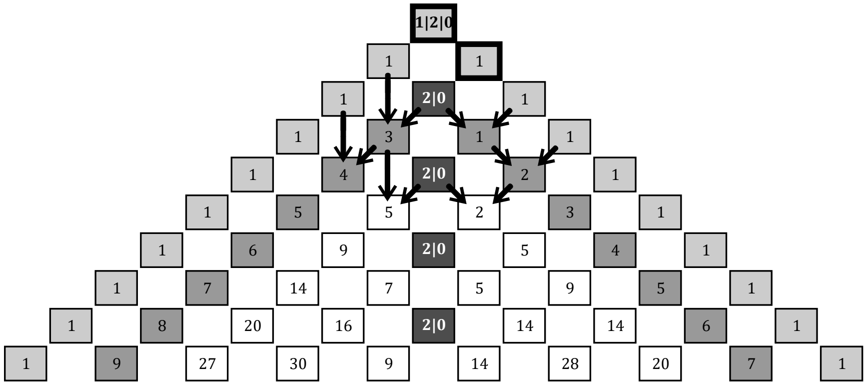


Tabelle 51

Die beiden dick eingerahmten Zahlen bilden das »Loch«! Im wabenförmigen »Zahlenkreis« ist das Loch im Zentrum und an der ersten Stelle der Grenzlinie zwischen den Sektoren B und C zu finden:

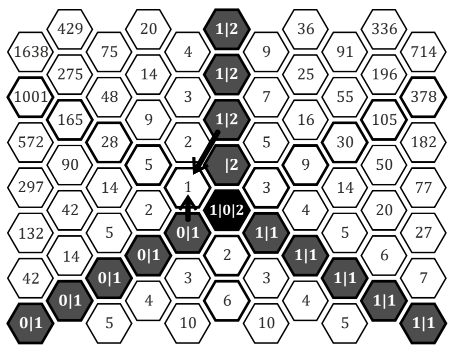


Tabelle 52

Ich habe die Zahl 1 im »Loch« daher weggelassen, da sie für die Summenbildung der Zahlen im Sektor C keine Verwendung findet. Genaugenommen finden auch die Zahlen im »schwarzen Loch« im Zentrum keine Verwendung. Dennoch bilden sie den Ursprung. Mich erinnert das an das »Schwarze Loch« im Zentrum unserer Galaxie, der Milchstraße ...

Berechnung der Potenzen von Φ

Es folgt nun ein kurzer Abschnitt, der sich mit der Berechnung der Potenzen von Φ befasst. Φ ist ja, wie wir bereits wissen, eine *irrationale Zahl* mit unendlich vielen, nicht periodisch auftretenden Stellen nach dem Komma. Und einigermaßen aufwendig ist daher die Berechnung ihrer Potenzen, da wir dafür die Zahl immer wieder mit sich selbst multiplizieren müssen.

Glücklicherweise verfügt unsere Wunderzahl aber über Eigenschaften, die uns das Potenzieren sehr erleichtern bzw. sogar komplett ersparen.

Ich gehe zunächst von dieser bereits bekannten Formel aus:

$$\boxed{\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}}$$

Mit dieser Formel habe ich zugleich auch die 1. Potenz von Φ berechnet, denn es gilt die triviale Tatsache:

$$\Phi^1 = \Phi$$

Um die 2. Potenz von Φ zu berechnen, muss ich die erste Potenz einmal mit sich selbst multiplizieren. Normalerweise schreiben wir dafür:

$$\Phi \cdot \Phi = \Phi^1 \cdot \Phi^1 = \Phi^{1+1} = \Phi^2$$

Für jede weitere Potenz müssen wir nur je ein weiteres Mal mit Φ multiplizieren:

$$\begin{aligned} \Phi^2 \cdot \Phi^1 &= \Phi^3 \\ \Phi^3 \cdot \Phi^1 &= \Phi^4 \\ \Phi^4 \cdot \Phi^1 &= \Phi^5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das können wir beliebig oft wiederholen.

In der Praxis werden wir dafür wohl meistens einen Taschenrechner verwenden und dort z. B. für die Berechnung der 9. Potenz von Φ Folgendes eintippen:

| 1 | , | 6 | 1 | 8 | 0 | 3 | 4 | x^y | 9 | = |

Als Ergebnis erhalten wir anschließend auf dem Display die Zahl 76,0132 (bei einer 4-stelligen Genauigkeit nach dem Komma).

Haben wir keinen Taschenrechner zur Hand, wird es deutlich mühsamer. Denn um die 9. Potenz von Φ »von Hand« zu berechnen, bleibt uns nichts anderes übrig, als Φ 7-mal mit sich selbst zu multiplizieren. Ich habe mich hier nicht vertippt, ich meine tatsächlich 7-mal. Denn die erste Potenz brauchen wir nicht auszurechnen, das ist die Zahl Φ selbst. Für die 2. Potenz zählen wir einfach 1 dazu – das haben wir bereits gelernt. Erst ab der 3. Potenz müssen wir tatsächlich rechnen.

Es geht aber auch viel einfacher. Denn die »Grund-Formel«

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

lässt sich (durch Multiplikation mit Φ auf beiden Seiten der Gleichung) umformen zu

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

(auch dies ist uns schon bekannt). In der Folge muss nun auch gelten:

$$\Phi^3 = \Phi^2\,\Phi = (\Phi + 1)\,\Phi = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\,\Phi + 1$$

Mit diesem Ergebnis wird das Rechnen »von Hand« bereits wesentlich einfacher, denn eine Multiplikation mit 2 erfordert weitaus weniger Rechenschritte als eine Multiplikation mit 1,618034....

Die 4. Potenz kann ich nun mit diesem »Trick« ebenfalls sehr einfach berechnen:

$$\Phi^4 = \Phi^3 \Phi = (2\Phi + 1)\Phi = 2\Phi^2 + \Phi = 2(\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 2 + \Phi = 3\Phi + 2$$

Ich berechne auf die selbe Weise nun auch noch die 5. Potenz:

$$\Phi^5 = \Phi^4 \Phi = (3\Phi + 2)\Phi = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3(\Phi + 1) + 2\Phi = 3\Phi + 3 + 2\Phi = 5\Phi + 3$$

Wir erkennen bereits das Muster, wie weitere Potenzen entstehen, ohne dass wir viel rechnen müssen:

$$\begin{array}{lcrcr}
\Phi^1 & = & 1\,\Phi & \pm & 0 \\
\Phi^2 & = & 1\,\Phi & + & 1 \\
\Phi^3 & = & 2\,\Phi & + & 1 \\
\Phi^4 & = & 3\,\Phi & + & 2 \\
\Phi^5 & = & 5\,\Phi & + & 3 \\
\Phi^6 & = & 8\,\Phi & + & 5 \\
\Phi^7 & = & 13\,\Phi & + & 8 \\
\Phi^8 & = & 21\,\Phi & + & 13 \\
\Phi^9 & = & 34\,\Phi & + & 21 \\
\Phi^{10} & = & 55\,\Phi & + & 34 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Hier liegen sie uns lang ausgestreckt zu Füßen, unsere Freunde, die Fibonacci-Zahlen! :-)

Um die oben erwähnte 9. Potenz von Φ auszurechnen, genügt es also, wenn wir Φ mit 34 multiplizieren und 21 dazuzählen – wir erhalten das gleiche Ergebnis.

Gibt es für negative Potenzen ebenfalls eine so einfache »Abkürzung«? Ja, auch die negativen Potenzen können wir, ausgehend von unserer »Grund-Formel«

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

leicht berechnen. Wir können die Formel nämlich auch auf folgende Weise aufschreiben:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \text{ bzw. } \Phi^{-1} = \Phi - 1$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi^{-2} &= \Phi^{-1}\Phi^{-1} = (\Phi-1)(\Phi-1) = \Phi^2 - 2\Phi + 1 = \Phi + 1 - 2\Phi + 1 = -\Phi + 2 \\
\Phi^{-3} &= \Phi^{-2}\Phi^{-1} = (-\Phi+2)(\Phi-1) = -\Phi^2 + 3\Phi - 2 = -(\Phi+1) + 3\Phi - 2 = 2\Phi - 3 \\
\Phi^{-4} &= \Phi^{-3}\Phi^{-1} = (2\Phi-3)(\Phi-1) = 2\Phi^2 - 5\Phi + 3 = 2(\Phi+1) - 5\Phi + 3 = \\
&= 2\Phi + 2 - 5\Phi + 3 = -3\Phi + 5 \\
\Phi^{-5} &= \Phi^{-4}\Phi^{-1} = (-3\Phi+5)(\Phi-1) = -3\Phi^2 + 8\Phi - 5 = \\
&= -3(\Phi+1) + 8\Phi - 5 = -3\Phi - 3 + 8\Phi - 5 = 5\Phi - 8 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir alle nötigen Zutaten, um unsere Tabelle mit den »vereinfachten« Potenzen von Φ zu vervollständigen, und sehen, dass sich die Fibonacci-Zahlen wie zu erwarten im negativen Bereich nahtlos fortsetzen. Auch das Muster der alternierenden Vorzeichen ist uns erhalten geblieben:

$$
\begin{array}{lcrcr}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\Phi^{-10} & = & -55\Phi & + & 89 \\
\Phi^{-9} & = & 34\Phi & - & 55 \\
\Phi^{-8} & = & -21\Phi & + & 34 \\
\Phi^{-7} & = & 13\Phi & - & 21 \\
\Phi^{-6} & = & -8\Phi & + & 13 \\
\Phi^{-5} & = & 5\Phi & - & 8 \\
\Phi^{-4} & = & -3\Phi & + & 5 \\
\Phi^{-3} & = & 2\Phi & - & 3 \\
\Phi^{-2} & = & -1\Phi & + & 2 \\
\Phi^{-1} & = & 1\Phi & - & 1 \\
\Phi^{\pm 0} & = & \pm 0\Phi & + & 1 \\
\Phi^{1} & = & 1\Phi & \pm & 0 \\
\Phi^{2} & = & 1\Phi & + & 1 \\
\Phi^{3} & = & 2\Phi & + & 1 \\
\Phi^{4} & = & 3\Phi & + & 2 \\
\Phi^{5} & = & 5\Phi & + & 3 \\
\Phi^{6} & = & 8\Phi & + & 5 \\
\Phi^{7} & = & 13\Phi & + & 8 \\
\Phi^{8} & = & 21\Phi & + & 13 \\
\Phi^{9} & = & 34\Phi & + & 21 \\
\Phi^{10} & = & 55\Phi & + & 34 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Cosinus Φ

Als wir die Zeilensummen im Phi-Dreieck notiert hatten, haben wir bei alternierenden Vorzeichen (abwechselnd + und –) als Ergebnis jeweils einen Wert zwischen +2 und –2 erhalten (siehe Tabelle 5 und Bild 9 auf Seite 47). Damals hatte ich gesagt, ich werde mir diese »Schlange« notieren und im Auge behalten. Zur Erinnerung hier nochmals das Bild der »Schlange«:

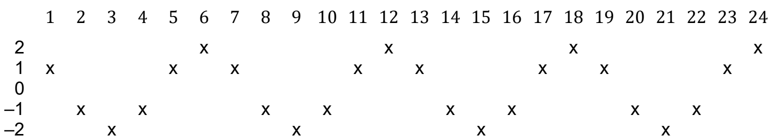


Bild 12

Die »Schlange« erinnert an die Form einer Sinus- bzw. Cosinus-Linie. Eine Sinus-Linie entsteht, wenn wir am Umfang eines Kreises »einen Punkt befestigen« und anschließend den Kreis um seinen Mittelpunkt drehen. Während wir den Kreis drehen, zeichnen wir die »Höhe« des Punktes auf, sowie auf einer horizontalen Achse den Winkel, um den wir den Kreis jeweils gedreht haben:

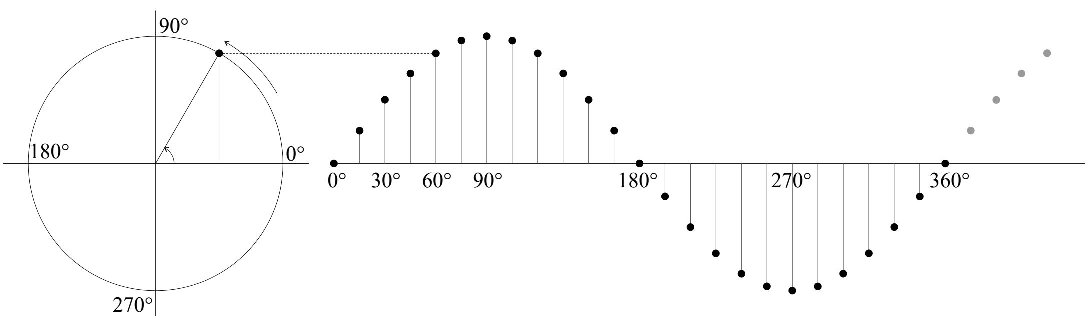


Bild 13

Die Punkte in Bild 13 liegen alle auf einer sog. »Sinus-Kurve«, welche die Grundform aller Schwingungen darstellt. Eine Cosinus-Kurve sieht genauso aus – der einzige Unterschied zur Sinus-Kurve besteht darin, dass sie dort beginnt, wo die

Sinus-Kurve ihr Maximum hat. Zum Vergleich seien hier beide Kurven untereinander dargestellt:

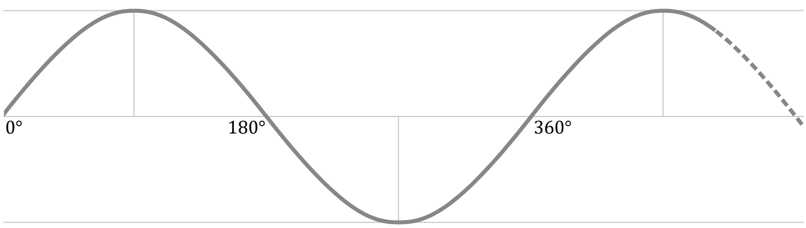


Bild 14: Sinus-Kurve

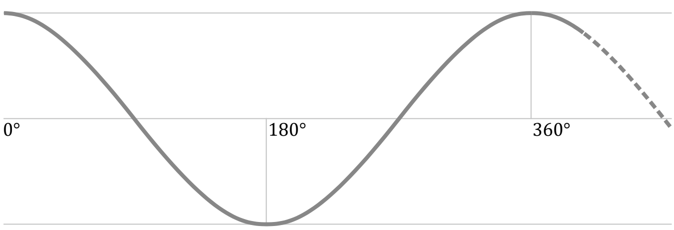


Bild 15: Cosinus-Kurve

Unsere »Schlange« hat ihre Maximalwerte (obere Umkehrpunkte) bei den Potenzen 0, 6, 12, 18, 24, ... (die nullte Potenz ist im Bild nicht eingezeichnet, da dort *kein eindeutiger Wert* vorhanden war). Der »logischen Fortsetzung« entlang der vertikalen 2er-Linie entspricht aber zweifellos der Wert 2. Die Schlange ist also eine Cosinus-Kurve. In Abständen von jeweils 60° schwankt ihr »Höhen-Wert« (Techniker würden es die *Amplitude* nennen) rhythmisch in einer Folge von
2 ... 1 ... – 1 ... –2 ... –1 ... 1 ...

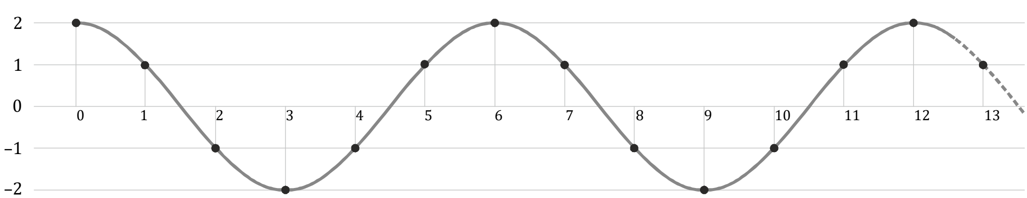


Bild 16

Eine »Standard«-Sinus- oder Cosinus-Kurve hat eine Amplitude (Maximalwert oder Scheitelwert) von genau 1. Der Kreis, welcher um seinen Mittelpunkt gedreht werden muss, um eine solche Kurve zu erzeugen, wird *Einheitskreis* genannt, er hat einen Radius von genau 1. Eine Sinus-Kurve ist auch dann noch eine Sinus-Kurve, wenn ihre Amplitude größer oder kleiner als 1 ist oder wenn ihre *Periodenlänge* kürzer oder länger ist. Wichtig ist lediglich die *Form* der Kurve. Will ich sie höher haben, so multipliziere ich ihre Amplitude mit einem Faktor, der größer als 1 ist. Soll sie niedriger sein, dann muss der Faktor kleiner als 1 sein. Ich kann die Kurve also beliebig dehnen und stauchen (sowohl in der Höhe als auch in der Breite), sie bleibt immer eine Sinus- oder Cosinus-Kurve.

Unsere »Schlangen«-Kurve hat eine Amplitude von genau 2. Wenn wir sie auf eine »Einheits-Cosinus-Kurve« umrechnen wollen, dann müssen wir die Amplitude in ihrem gesamten Verlauf nur durch 2 dividieren und können so überprüfen, ob die Werte an den Punkten, die uns bekannt sind, tatsächlich mit dem Amplituden-Wert einer Cosinus-Kurve an der entsprechenden Stelle übereinstimmt.

Die Periodenlänge der Schlangenkurve beträgt genau 6. Das wissen wir, weil der Abstand von einem Kurven-Maximum zum nächsten immer genau 6 ist: bei 0, 6, 12, 18, 24, ...

Da die Periodenlänge einer Sinus- oder Cosinuskurve 360° beträgt (also genau einer ganzen Umdrehung des Einheitskreises entspricht), kennen wir somit die Lage bestimmter Punkte unserer Schlangenkurve, nämlich jene im Abstand von jeweils

$$\frac{360°}{6} = 60°$$

Wir müssen nun nur schauen, wie groß die Amplituden an diesen Stellen bei einer Standard-Cosinuskurve sind und können dann sagen, ob die Punkte genau auf der Linie liegen (bzw. darunter oder darüber).

Normale Schul-Taschenrechner haben alle Tasten, mit welcher man den Wert von »Winkelfunktionen« (Sinus, Cosinus, Tangens, ...) berechnen kann. Tippen wir also die Werte ein und rechnen nach:

$$
\begin{aligned}
\cos(0°) &= 1\\
\cos(60°) &= 0{,}5\\
\cos(120°) &= -0{,}5\\
\cos(180°) &= -1\\
\cos(240°) &= -0{,}5\\
\cos(300°) &= 0{,}5\\
\cos(360°) &= 1
\end{aligned}
$$

Da die Amplituden unserer Kurve den Wert 2 haben, müssen wir unsere Ergebnisse noch mit diesem Wert multiplizieren und erhalten somit

$$
\begin{aligned}
2\cos(0°) &= 2\\
2\cos(60°) &= 1\\
2\cos(120°) &= -1\\
2\cos(180°) &= -2\\
2\cos(240°) &= -1\\
2\cos(300°) &= 1\\
2\cos(360°) &= 2
\end{aligned}
$$

Damit haben wir den Beweis[1] erbracht, dass alle Werte unserer »Schlangenlinie« tatsächlich genau auf einer Cosinuskurve liegen!

– – –

Bevor wir uns einer anderen Herangehensweise an die Zahl Φ zuwenden, untersuchen wir die Entstehung der Schlangenlinie noch ein wenig genauer.

In der TABELLE 4 auf Seite 45 haben wir ganz links eine Spalte mit den Zahlen 1 bis 24 geschrieben und daneben den errechneten Wert der zugehörigen Potenz von Φ (auf eine ganze Zahl gerundet). Gleichzeitig entsprach das genau der Summe der Zahlen in der jeweiligen Zeile der Tabelle. Ab der Potenz 2 (und höher) funktioniert das auch problemlos, aber die Potenzen 1 und 0 von Φ bringen ein

1 Im mathematischen Sinne ist es natürlich kein »Beweis«, wenn man auf einem Taschenrechner übereinstimmende Ergebnisse erhält. Dieses Buch stellt aber ganz bewusst einfachere Anforderungen und so möge uns dieser »Beweis« genügen. Mathematiker und Ingenieure wissen ohnehin, dass das Ergebnis tatsächlich richtig ist.

»kleines Problemchen« mit sich. Sie stimmen dort nämlich nicht mehr wirklich. Der tatsächliche Wert von $\Phi^1 = \Phi = 1{,}618\ldots$ weicht bereits sehr weit vom Tabellenwert 1 ab und der tatsächliche Wert von $\Phi^0 = 1$ weicht vom Tabellenwert 2, der sich aus der TABELLE 27C auf Seite 69 (Lucas-Folge) ergibt, noch weiter ab. Wir sind an dieser Stelle zu dem Schluss gekommen, dass wir die Abweichungen (die mit zunehmender Höhe der Potenzen immer kleiner werden), mit Hilfe einer erweiterten Tabelle (später Sektor C genannt) lösen können. Das stimmt soweit auch.

Die Potenzreihen, die zu unserer »Schlangenlinie« geführt haben, haben wir allerdings ausschließlich mit natürlichen (ganzen) Zahlen als Basis errechnet (vergleiche Seite 47) – als Beispiel zur Erinnerung möge die Zeile 9 dienen:

$$
\begin{aligned}
(\Phi^2)^9 = \Phi^{18} &= 5.778 = 3^9 - 9 \cdot 3^7 + 27 \cdot 3^5 - 30 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3 \\
(\Phi^3)^9 = \Phi^{27} &= 439.204 = 4^9 + 9 \cdot 4^7 + 27 \cdot 4^5 + 30 \cdot 4^3 + 9 \cdot 4 \\
(\Phi^4)^9 = \Phi^{36} &= 33.385.282 = 7^9 - 9 \cdot 7^7 + 27 \cdot 7^5 - 30 \cdot 7^3 + 9 \cdot 7 \\
(\Phi^5)^9 = \Phi^{45} &= 2.537.720.636 = 11^9 + 9 \cdot 11^7 + 27 \cdot 11^5 + 30 \cdot 11^3 + 9 \cdot 11 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Später haben wir dann auch noch die Zeile 24 mit dem Basiswert $\Phi^1 = 1$ berechnet, wobei der Wert 1 aus der Zeile 1 der Tabelle entnommen wurde. Streng genommen ist Φ^1 natürlich nicht 1, sondern Φ. Ich möchte an dieser Stelle die Potenzreihe für einige Zeilen mit keinem der ganzzahligen Werte als Basis berechnen – stattdessen soll uns als Basis der Wert der tatsächlichen Zahl Φ dienen, nämlich 1,618033988...

Die Vorzeichen werde ich wie schon bei der Berechnung unserer »Schlangenlinie« alternierend verwenden, also immer abwechselnd + und –.

Das Ergebnis (siehe nächste Seite) ist durchaus bemerkenswert:

$$
\begin{array}{lrl}
1\Phi^{\mathbf{0}} & = & \mathbf{2}\ (1)\\
1\Phi^{\mathbf{1}} & = & \mathbf{\Phi}\\
1\Phi^{\mathbf{2}} - 2\Phi^{0} & = & \mathbf{\Phi^{-1}}\\
1\Phi^{\mathbf{3}} - 3\Phi^{1} & = & -\mathbf{\Phi^{-1}}\\
1\Phi^{\mathbf{4}} - 4\Phi^{2} + 2\Phi^{0} & = & -\mathbf{\Phi}\\
1\Phi^{\mathbf{5}} - 5\Phi^{3} + 5\Phi^{1} & = & -\mathbf{2}\\
1\Phi^{\mathbf{6}} - 6\Phi^{4} + 9\Phi^{2} - 2\Phi^{0} & = & -\mathbf{\Phi}\\
1\Phi^{\mathbf{7}} - 7\Phi^{5} + 14\Phi^{3} - 7\Phi^{1} & = & -\mathbf{\Phi^{-1}}\\
1\Phi^{\mathbf{8}} - 8\Phi^{6} + 20\Phi^{4} - 16\Phi^{2} + 2\Phi^{0} & = & \mathbf{\Phi^{-1}}\\
1\Phi^{\mathbf{9}} - 9\Phi^{7} + 27\Phi^{5} - 30\Phi^{3} + 9\Phi^{1} & = & \mathbf{\Phi}\\
1\Phi^{\mathbf{10}} - 10\Phi^{8} + 35\Phi^{6} - 50\Phi^{4} + 25\Phi^{2} - 2\Phi^{0} & = & \mathbf{2}\\
1\Phi^{\mathbf{11}} - 11\Phi^{9} + 44\Phi^{7} - 77\Phi^{5} + 55\Phi^{3} - 11\Phi^{1} & = & \mathbf{\Phi}\\
1\Phi^{\mathbf{12}} - 12\Phi^{10} + 54\Phi^{8} - 112\Phi^{6} + 105\Phi^{4} - 36\Phi^{2} + 2\Phi^{0} & = & \mathbf{\Phi^{-1}}\\
1\Phi^{\mathbf{13}} - 13\Phi^{11} + 65\Phi^{9} - 156\Phi^{7} + 182\Phi^{5} - 91\Phi^{3} + 13\Phi^{1} & = & -\mathbf{\Phi^{-1}}\\
1\Phi^{\mathbf{14}} - 14\Phi^{12} + 77\Phi^{10} - 210\Phi^{8} + 294\Phi^{6} - 196\Phi^{4} + 49\Phi^{2} - 2\Phi^{0} & = & -\mathbf{\Phi}\\
1\Phi^{\mathbf{15}} - 15\Phi^{13} + 90\Phi^{11} - 275\Phi^{9} + 450\Phi^{7} - 378\Phi^{5} + 140\Phi^{3} - 15\Phi^{1} & = & -\mathbf{2}\\
1\Phi^{\mathbf{16}} - 16\Phi^{14} + 104\Phi^{12} - 352\Phi^{10} + 660\Phi^{8} - 672\Phi^{6} + 336\Phi^{4} - 64\Phi^{2} + 2\Phi^{0} & = & -\mathbf{\Phi}\\
1\Phi^{\mathbf{17}} - 17\Phi^{15} + 119\Phi^{13} - 442\Phi^{11} + 935\Phi^{9} - 1122\Phi^{7} + 714\Phi^{5} - 204\Phi^{3} + 17\Phi^{1} & = & -\mathbf{\Phi^{-1}}\\
1\Phi^{\mathbf{18}} - 18\Phi^{16} + 135\Phi^{14} - 546\Phi^{12} + 1287\Phi^{10} - 1782\Phi^{8} + 1386\Phi^{6} - 540\Phi^{4} + 81\Phi^{2} - 2\Phi^{0} & = & \mathbf{\Phi^{-1}}\\
1\Phi^{\mathbf{19}} - 19\Phi^{17} + 152\Phi^{15} - 665\Phi^{13} + 1729\Phi^{11} - 2717\Phi^{9} + 2508\Phi^{7} - 1254\Phi^{5} + 285\Phi^{3} - 19\Phi^{1} & = & \mathbf{\Phi}\\
1\Phi^{\mathbf{20}} - 20\Phi^{18} + 170\Phi^{16} - 800\Phi^{14} + 2275\Phi^{12} - 4004\Phi^{10} + 4290\Phi^{8} - 2640\Phi^{6} + 825\Phi^{4} - 100\Phi^{2} + 2\Phi^{0} & = & \mathbf{2}\\
1\Phi^{\mathbf{21}} - 21\Phi^{19} + 189\Phi^{17} - 952\Phi^{15} + 2940\Phi^{13} - 5733\Phi^{11} + 7007\Phi^{9} - 5148\Phi^{7} + 2079\Phi^{5} - 385\Phi^{3} + 21\Phi^{1} & = & \mathbf{\Phi}
\end{array}
$$

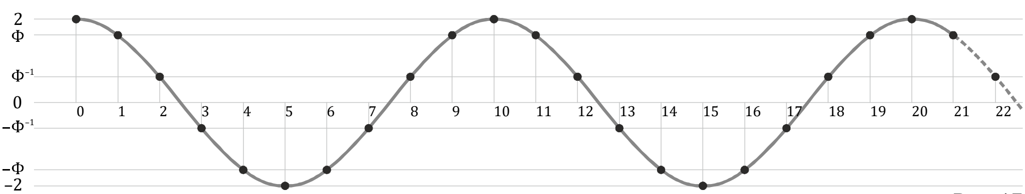


Bild 17

Die Cosinuskurve (ich nenne sie jetzt nicht mehr »Schlangenlinie«) ist wieder sichtbar! Mit gleicher Amplitude, allerdings anderer Periodenlänge! Die Periodenlänge (Abstand zwischen zwei Maximalwerten) beträgt nun nicht mehr 6 sondern 10. Und auch die Punkte liegen wie vorhin *exakt* auf der Cosinuskurve! Wir überprüfen das:

Zunächst stellen wir fest, dass die einzelnen Punkte in horizontaler Richtung (hier sind die Winkelgrade auf dem Einheitskreis aufgetragen) je 36° Abstand zueinander aufweisen.

$$\frac{360°}{10} = 36°$$

Tippen wir die Grad-Werte an diesen Stellen in den Taschenrechner ein, erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$
\begin{aligned}
\cos(0^\circ) &= 1 \\
\cos(36^\circ) &= 0{,}809016994 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\Phi}{2} \\
\cos(72^\circ) &= 0{,}309016994 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\Phi-1}{2} = \frac{1}{2\Phi} \\
\cos(108^\circ) &= -0{,}309016994 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\Phi}{2} = -\frac{1}{2\Phi} \\
\cos(144^\circ) &= -0{,}809016994 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = -\frac{\Phi}{2} \\
\cos(180^\circ) &= -1 \\
\cos(216^\circ) &= -0{,}809016994 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = -\frac{\Phi}{2} \\
\cos(252^\circ) &= -0{,}309016994 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\Phi}{2} = -\frac{1}{2\Phi} \\
\cos(288^\circ) &= 0{,}309016994 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\Phi-1}{2} = \frac{1}{2\Phi} \\
\cos(324^\circ) &= 0{,}809016994 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\Phi}{2} \\
\cos(360^\circ) &= 1
\end{aligned}
$$

Da die Amplitude wiederum 2 ist, müssen wir die Gleichungen auch noch auf beiden Seiten mit 2 multiplizieren

$$
\begin{aligned}
2\cos(0^\circ) &= 2 \\
2\cos(36^\circ) &= \Phi \\
2\cos(72^\circ) &= \Phi^{-1} \\
2\cos(108^\circ) &= -\Phi^{-1} \\
2\cos(144^\circ) &= -\Phi \\
2\cos(180^\circ) &= -2 \\
2\cos(216^\circ) &= -\Phi \\
2\cos(252^\circ) &= -\Phi^{-1} \\
2\cos(288^\circ) &= \Phi^{-1} \\
2\cos(324^\circ) &= \Phi \\
2\cos(360^\circ) &= 2
\end{aligned}
$$

und erhalten die Bestätigung, dass sämtliche Punkte genau auf der Kurve liegen.

Die Ergebnisse der Potenzreihen mit der Basiszahl Φ habe ich vorhin einfach hingeschrieben. Wir sollten das noch überprüfen und können das leicht mit Hilfe unserer Berechnungsmethode für die Potenzen von Φ machen:

Ich beginne in der allerersten Zeile (mit der Potenz 0) jedoch gleich mit einem *mathematischen Nonsens*:

$\Phi^0 = 1 = 2$

Eine Zahl kann unmöglich gleichzeitig zwei verschiedene Werte haben! Diesen Widerspruch haben wir bereits bei den TABELLEN 27B und 27C (Seite 69) gesehen. $\Phi^0 = 1$ entspricht dem »richtig gerechneten« Ergebnis. Die Cosinuskurve jedoch meint dazu etwas ganz anderes. Es wäre ein ebensolcher Nonsens, die Kurve ab 36° bis in alle Ewigkeit mit einem Maximalwert von 2 fortlaufen zu lassen, beim Winkel 0° sollte sie jedoch plötzlich einen Wert von 1 haben ... Haben wir irgendwo einen kapitalen Fehler gemacht? Vielleicht. Vielleicht auch nicht.

Fahren wir fort, die Zeilen mit den Potenzen 1 bis 21 zu berechnen:

$\Phi^1 = \Phi$

$\Phi^2 - 2\,\Phi^0 = \Phi^{-1}$
$1(1\,\Phi + 1) - 2(0\,\Phi + 1) =$
$1\,\Phi + 1 - 0\,\Phi - 2 =$
$1\,\Phi - 1 = \Phi^{-1}$

$\Phi^{-3}\,\Phi^1 = -\Phi^{-1}$

$1(2\,\Phi + 1) - 3(1\,\Phi + 0) =$
$2\,\Phi + 2 - 3\,\Phi + 0 =$
$-1\,\Phi + 1 = -\Phi^{-1}$

$\Phi^4 - 4\,\Phi^2 + 2\,\Phi^0 = -\Phi$
$1(3\,\Phi + 2) - 4(1\,\Phi + 1) + 2(0\,\Phi + 1) =$
$3\,\Phi + 2 - 4\,\Phi - 4 + 0\,\Phi + 2 =$
$-1\,\Phi + 0 = -\Phi$

$\Phi^5 - 5\Phi^3 + 5\Phi^1 = -2$

$1(5\Phi + 3) - 5(2\Phi + 1) + 5(1\Phi + 0) =$
$5\Phi + 3 - 10\Phi - 5 + 5\Phi + 0 =$
$0\Phi - 2 = -2$

$\Phi^6 - 6\Phi^4 + 9\Phi^2 - 2\Phi^0 = -\Phi$

$(8\Phi + 5) - 6(3\Phi + 2) + 9(\Phi + 1) - 2 \cdot 1 =$
$8\Phi + 5 - 18\Phi - 12 + 9\Phi + 9 - 2 = -\Phi$

$\Phi^7 - 7\Phi^5 + 14\Phi^3 - 7\Phi^1 = -\Phi^{-1}$

$1(13\Phi + 8) - 7(5\Phi + 3) + 14(2\Phi + 1) - 7(1\Phi + 0) =$
$13\Phi + 8 - 35\Phi - 21 + 28\Phi + 14 - 7\Phi - 0 =$
$-1\Phi + 1 = -\Phi^{-1}$

$\Phi^8 - 8\Phi^6 + 20\Phi^4 - 16\Phi^2 + 2\Phi^0 = \Phi^{-1}$

$1(21\Phi + 13) - 8(8\Phi + 5) + 20(3\Phi + 2) - 16(\Phi + 1) + 2(0\Phi + 1) =$
$21\Phi + 13 - 64\Phi - 40 + 60\Phi + 40 - 16\Phi - 16 + 0\Phi + 2 =$
$1\Phi - 1 = \Phi^{-1}$

$\Phi^9 - 9\Phi^7 + 27\Phi^5 - 30\Phi^3 + 9\Phi^1 = \Phi$

$1(34\Phi + 21) - 9(13\Phi + 8) + 27(5\Phi + 3) - 30(2\Phi + 1) + 9(1\Phi + 0) =$
$34\Phi + 21 - 117\Phi - 72 + 135\Phi + 81 - 60\Phi - 30 + 9\Phi + 0 =$
$1\Phi \pm 0 = \Phi$

$\Phi^{10} - 10\Phi^8 + 35\Phi^6 - 50\Phi^4 + 25\Phi^2 - 2\Phi^0 = 2$

$1(55\Phi + 34) - 10(21\Phi + 13) + 35(8\Phi + 5) - 50(3\Phi + 2) +$
$25(1\Phi + 1) - 2(0\Phi + 1) =$
$55\Phi + 34 - 210\Phi - 130 + 280\Phi + 175 - 150\Phi - 100 + 25\Phi + 25 - 0\Phi - 2 =$
$\pm 0\Phi + 2 = 2$

$\Phi^{11} - 11\Phi^9 + 44\Phi^7 - 77\Phi^5 + 55\Phi^3 - 11\Phi^1 = \Phi$

$1(89\Phi+55) - 11(34\Phi+21) + 44(13\Phi+8) - 77(5\Phi+3) + 55(2\Phi+1) -$
$11(1\Phi+0) =$
$89\Phi + 55 - 374\Phi - 231 + 572\Phi + 352 - 385\Phi - 231 + 110\Phi + 55 - 11\Phi - 0 =$
$1\Phi \pm 0 = \Phi$

$\Phi^{12} - 12\Phi^{10} + 54\Phi^8 - 112\Phi^6 + 105\Phi^4 - 36\Phi^2 + 2\Phi^0 = \Phi^{-1}$

$1(144\Phi+89) - 12(55\Phi+34) + 54(21\Phi+13) - 112(8\Phi+5) +$
$105(3\Phi+2) - 36(1\Phi+1) + 2(0\Phi+1) =$
$144\Phi + 89 - 660\Phi - 408 + 1134\Phi + 702 - 896\Phi - 560 + 315\Phi +$
$210 - 36\Phi - 36 + 0\Phi + 2 = 1\Phi - 1 = \Phi^{-1}$

$\Phi^{13} - 13\Phi^{11} + 65\Phi^9 - 156\Phi^7 + 182\Phi^5 - 91\Phi^3 + 13\Phi^1 = -\Phi^{-1}$

$1(233\Phi+144) - 13(89\Phi+55) + 65(34\Phi+21) - 156(13\Phi+8) +$
$182(5\Phi+3) - 91(2\Phi+1) + 13(1\Phi+0) =$
$233\Phi + 144 - 1.157\Phi - 715 + 2.110\Phi + 1.365 - 2.028\Phi - 1.248 +$
$910\Phi + 546 - 182\Phi - 91 + 13\Phi + 0 = -1\Phi + 1 = -\Phi^{-1}$

$\Phi^{14} - 14\Phi^{12} + 77\Phi^{10} - 210\Phi^8 + 294\Phi^6 - 196\Phi^4 + 49\Phi^2 - 2\Phi^0 = -\Phi$

$1(377\Phi+233) - 14(144\Phi+89) + 77(55\Phi+34) - 210(21\Phi+13) +$
$294(8\Phi+5) - 196(3\Phi+2) + 49(1\Phi+1) - 2(0\Phi+1) =$
$377\Phi + 233 - 2.016\Phi - 1.246 + 4.235\Phi + 2.618 - 4.410\Phi - 2.730 +$
$2.352\Phi + 1.470 - 588\Phi - 392 + 49\Phi + 49 - 0\Phi - 2 = -1\Phi \pm 0 = -\Phi$

$\Phi^{15} - 15\Phi^{13} + 90\Phi^{11} - 275\Phi^9 + 450\Phi^7 - 378\Phi^5 + 140\Phi^3 - 15\Phi^1 = -2$

$(610\Phi+377) - 15(233\Phi+144) + 90(89\Phi+55) - 275(34\Phi+21) +$
$450(13\Phi+8) - 378(5\Phi+3) + 140(2\Phi+1) - 15\Phi^1 =$
$610\Phi + 377 - 3.495\Phi - 2.160 + 8.010\Phi + 4.950 - 9.350\Phi - 5.775 +$
$5.850\Phi + 3.600 - 1.890\Phi - 1.134 + 280\Phi + 140 - 15\Phi = -2$

$$\Phi^{16}-16\,\Phi^{14}+104\,\Phi^{12}-352\,\Phi^{10}+660\,\Phi^{8}-672\,\Phi^{6}+336\,\Phi^{4}-64\,\Phi^{2}+2\,\Phi^{0}=-\Phi$$

$$1(987\,\Phi+610)-16(377\,\Phi+233)+104(144\,\Phi+89)-352(55\,\Phi+34)+$$
$$660(21\,\Phi+13)-672(8\,\Phi+5)+336(3\,\Phi+2)-64(\Phi+1)+2(0\,\Phi+1)=$$
$$987\,\Phi+610-6.032\,\Phi-3.728+14.976\,\Phi+9.256-19.360\,\Phi-11.968+$$
$$13.860\,\Phi+8.580-5.376\,\Phi-3.360+1.008\,\Phi+672-64\,\Phi-64+0\,\Phi+2=$$
$$-1\,\Phi\pm0=-\Phi$$

$$\Phi^{17}-17\,\Phi^{15}+119\,\Phi^{13}-442\,\Phi^{11}+935\,\Phi^{9}-1.122\,\Phi^{7}+714\,\Phi^{5}-204\,\Phi^{3}+17\,\Phi^{1}=$$
$$-\Phi^{-1}$$
$$1(1.597\,\Phi+987)-17(610\,\Phi+377)+119(233\,\Phi+144)-442(89\,\Phi+55)+$$
$$935(34\,\Phi+21)-1.122(13\,\Phi+8)+714(5\,\Phi+3)-204(2\,\Phi+1)+17(1\,\Phi+0)=$$
$$1.597\,\Phi+987-10.370\,\Phi-6.409+27.727\,\Phi+17.136-39.338\,\Phi-24.310+$$
$$31.790\,\Phi+19.635-14.586\,\Phi-8.976+3.570\,\Phi+2.142-408\,\Phi-204+17\,\Phi+0=$$
$$-1\,\Phi+1=-\Phi^{-1}$$

$$\Phi^{18}-18\,\Phi^{16}+135\,\Phi^{14}-546\,\Phi^{12}+1.287\,\Phi^{10}-1.782\,\Phi^{8}+1.386\,\Phi^{6}-540\,\Phi^{4}+$$
$$81\,\Phi^{2}-2\,\Phi^{0}=\Phi^{-1}$$

$$1(2.584\,\Phi+1.597)-18(987\,\Phi+610)+135(377\,\Phi+233)-546(144\,\Phi+89)+$$
$$1.287(55\,\Phi+34)-1.782(21\,\Phi+13)+1.386(8\,\Phi+5)-540(3\,\Phi+2)+81(\Phi+1)-$$
$$2(0\,\Phi+1)=$$
$$2.584\,\Phi+1.597-17.766\,\Phi-10.980+50.895\,\Phi+31.455-78.624\,\Phi-48.594+$$
$$70.785\,\Phi+43.758-37.422\,\Phi-23.166+11.088\,\Phi+6.930-1.620\,\Phi-1.080+$$
$$81\,\Phi+81-0\,\Phi-2=$$
$$1\,\Phi-1=\Phi^{-1}$$

$$\Phi^{19}-19\,\Phi^{17}+152\,\Phi^{15}-665\,\Phi^{13}+1.729\,\Phi^{11}-2.717\,\Phi^{9}+2.508\,\Phi^{7}-1.254\,\Phi^{5}+$$
$$285\,\Phi^{3}-19\,\Phi^{1}=\Phi$$

$$1(4.181\,\Phi+2.584)-19(1.597\,\Phi+987)+152(610\,\Phi+377)-665(233\,\Phi+144)+$$
$$1.729(89\,\Phi+55)-2.717(34\,\Phi+21)+2.508(13\,\Phi+8)-1.254(5\,\Phi+3)+$$
$$285(2\,\Phi+1)-19(1\,\Phi+0)=$$
$$4.181\,\Phi+2.584-30.343\,\Phi-18.753+92.720\,\Phi+57.304-154.945\,\Phi-95.760+$$
$$153.881\,\Phi+95.095-92.378\,\Phi-57.057+32.604\,\Phi+20.064-6.270\,\Phi-3.762+$$
$$570\,\Phi+285-19\,\Phi-0=$$
$$1\,\Phi\pm0=\Phi$$

$$\Phi^{20}-20\,\Phi^{18}+170\,\Phi^{16}-800\,\Phi^{14}+2.275\,\Phi^{12}-4.004\,\Phi^{10}+4.290\,\Phi^{8}-2.640\,\Phi^{6}+825\,\Phi^{4}-100\,\Phi^{2}+2\,\Phi^{0}=2$$

$$1(6.765\,\Phi+4.181)-20(2.584\,\Phi+1.597)+170(987\,\Phi+610)-800(377\,\Phi+233)+2.275(144\,\Phi+89)-4.004(55\,\Phi+34)+4.290(21\,\Phi+13)-2.640(8\,\Phi+5)+825(3\,\Phi+2)-100(1\,\Phi+1)+2(0\,\Phi+1)=$$
$$6.765\,\Phi+4.181-51.680\,\Phi-31.940+167.790\,\Phi+103.700-301.600\,\Phi-186.400+327.600\,\Phi+202.475-220.220\,\Phi-136.136+90.090\,\Phi+55.770-21.120\,\Phi-13.200+2.475\,\Phi+1.650-100\,\Phi-100+0\,\Phi+2=$$
$$\pm 0\,\Phi+2=2$$

$$\Phi^{21}-21\,\Phi^{19}+189\,\Phi^{17}-952\,\Phi^{15}+2.940\,\Phi^{13}-5.733\,\Phi^{11}+7.007\,\Phi^{9}-5.148\,\Phi^{7}+2.079\,\Phi^{5}-385\,\Phi^{3}+21\,\Phi^{1}=\Phi$$

$$1(10.946\,\Phi+6.765)-21(4.181\,\Phi+2.584)+189(1.597\,\Phi+987)-952(610\,\Phi+377)+2.940(233\,\Phi+144)-5.733(89\,\Phi+55)+7.007(34\,\Phi+21)-5.148(13\,\Phi+8)+2.079(5\,\Phi+3)-385(2\,\Phi+1)+21(1\,\Phi+0)=$$
$$10.946\,\Phi+6.765-87.801\,\Phi-54.264+301.833\,\Phi+186.543-580.720\,\Phi-358.904+685.020\,\Phi+423.360-510.237\,\Phi-315.315+238.238\,\Phi+147.147-66.924\,\Phi-41.184+10.395\,\Phi+6.237-770\,\Phi-385+21\,\Phi+0=$$
$$1\,\Phi\pm 0=\Phi$$

Ab der Zeile 1 ergab unsere Überprüfung: Fehlerfrei!

– – –

Wie bereits angekündigt machen wir nun einen Abstecher zu etwas ganz Anderem – aber versprochen: Wir landen am Ende des Kapitels garantiert wieder bei unserer Zahl Φ!

Zahlensysteme

Wir benutzen zum Rechnen *Zahlen*, die sich aus *Ziffern* zusammensetzen. In unserer heutigen Welt wird allgemein das sog. *Dezimalsystem* für die Darstellung von Zahlen verwendet. *Dezi* leitet sich vom lateinischen *decem* ab und bedeutet *zehn*. Das Dezimalsystem verwendet *zehn* verschiedene Ziffern von 0 bis 9.

Es sind heute auch noch andere Zahlensysteme in Verwendung, auch wenn wir sie im Alltag kaum bemerken. Alle unsere Computer verwenden z. B. das *Dualsystem*, das nur 2 verschiedene Ziffern braucht, um alle Zahlen darstellen zu können. Diese beiden Ziffern sind 0 und 1. Davon abgeleitet wird in Computern auch noch das *Oktalsystem* (mit 8 verschiedenen Ziffern) sowie das *Hexadezimalsystem* (mit 16 verschiedenen Ziffern) verwendet.

Das Wesentliche eines Zahlensystems ist dessen *Basis*. Die Basis gibt an, wieviele verschiedene Ziffern für die Darstellung von Zahlen verwendet werden. Beim erwähnten Dezimalsystem ist die Basis 10. Die Darstellung von Zahlen, die größer als die größte Ziffer 9 sind, erfolgt in einem *Stellenwertsystem*. Dieses lässt sich anhand eines Beispiels gut erklären.

Wenn ich eine größere Zahl aufschreiben will, nehmen wir die Zahl 24.753, dann hat deren Ziffernfolge 2-4-7-5-3 eine bestimmte Bedeutung (der Punkt zwischen 24 und 753 dient nur zur »Orientierung«, er kann auch weggelassen werden).

$$\begin{aligned} 24753 &= 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \\ &= 2 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \\ &= 20000 + 4000 + 700 + 50 + 3 \end{aligned}$$

Die *Stellen*, an welchen die Ziffern stehen, geben also an, mit welcher *Potenz* der Basis 10 ich die Ziffer an dieser Stelle multiplizieren muss. Die ganz rechte Stelle ist die Stelle 0, dann folgen links davon die Stellen 1, 2, 3, ... usw.

Etwas anders ausgedrückt: Die einzelne Ziffer muss so oft, wie es ihrer Stelle entspricht, mit der Basiszahl multipliziert werden. Die Ziffer 2 steht an der Stelle 4, ich muss sie daher mit 10000 multiplizieren, bzw. ich muss »4 Nullen dranhängen«. Die Ziffer 3 steht an der Stelle 0, ich muss sie daher gar nicht mit der Basiszahl multiplizieren.

Mit diesem System, wie wir es bisher besprochen haben, kann ich jedoch nur *ganze Zahlen* darstellen. Wie stelle ich eine Zahl dar, die eine Größe zwischen den ganzen Zahlen hat? Nun, es ist uns gut bekannt: Wir verwenden dafür das *Komma*. Es hat keine andere Funktion als die Position der Stelle 0 anzuzeigen. Unmittelbar links vom Komma befindet sich die Stelle 0, rechts davon bekommen die Potenzen, mit denen die dort hingeschriebenen Ziffern zu multiplizieren sind, negative Werte.

Als Beispiel nehmen wir diesmal die Zahl 37,125. Wir können das Ergebnis einer Division »297 geteilt durch 8« als *Bruch* hinschreiben

$$\frac{297}{8}$$

oder auch in der *Dezimalschreibweise* als 37,125.

$$\begin{aligned} 37{,}125 &= 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} \\ &= 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001 \\ &= 30 + 7 + 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}005 \end{aligned}$$

Mit dieser Methode können wir *jede* Zahl darstellen – allerdings mit einer gewissen Einschränkung, denn manche Zahlen lassen sich auf diese Weise nicht *exakt* darstellen. Der Bruch

$$\frac{1}{7}$$

kann in der Dezimalschreibweise nicht beliebig genau dargestellt werden, da das Ergebnis eine unendliche Menge an Ziffern rechts vom Komma erfordert:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857142857\ldots$$

Im Fall von 1 geteilt durch 7 können wir uns noch helfen, da sich die Ziffernfolge rechts vom Komma nach jeweils 6 Ziffern wiederholt: 142857 142857 142857 142857 ...

Wir können deren sog. *Periode* mit einem Querstrich oberhalb der sich wiederholenden Ziffern markieren

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

und erhalten so eine relativ kurze und dennoch eindeutige Schreibweise für die Dezimalzahl.

Es gibt jedoch viele Zahlen, bei denen diese Methode nicht funktioniert, da ihre Dezimalschreibweise unendlich viele Ziffern nach dem Komma erfordert, die *nicht* periodisch sind. Beispiele dafür sind $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ oder die »Kreiszahl« $\pi = 3,14159265358979\ldots$.

Die Zahl π (gesprochen: *Pi*) wurde am 11. November 2016 von einem Computer auf mehr als 22 Billionen Stellen nach dem Komma genau berechnet[1]. Ob das Ergebnis tatsächlich richtig war, habe ich allerdings nicht überprüft ...

Alle bekannten Zahlensysteme verwenden als Basis eine *natürliche Zahl*, also eine *positive ganze Zahl*. Wir kennen Systeme mit den Basiszahlen 2, 8, 10, 12, 16, 20 (dieses wurde z. B. vom Volk der Maya verwendet) oder auch 64 – es gibt noch eine Menge mehr darüber zu erzählen[2].

Ich habe mir nun die Frage gestellt, ob man nicht auch ein Zahlensystem schaffen könnte, dessen Basis eine *nicht-ganzzahlige* Zahl ist? Wie wäre es mit einem System, dessen Basis 4,37 ist? Grundsätzlich spricht nichts dagegen, denn man kann tatsächlich mit jeder beliebigen Zahl ein solches System »zusammenbauen«. Probieren wir das anhand eines Beispiels aus:

1 π – Faszination in Ziffern: https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/pi-wissen/pi-nachkommastellen-rekorde/

2 Stichwort Zahlensystem: https://de.wikipedia.org/wiki/Zahlensystem

Ich möchte die Zahl 561,42 in einem System mit der Basis 4,37 darstellen. Bittet man einen Mathematiker darum, das zu beschreiben, dann kommt garantiert das Wort »Logarithmus« darin vor. Das Logarithmieren ist die »Umkehroperation des Potenzierens«. Aber da dieses Buch nicht für Mathematiker geschrieben ist, will ich die Erklärung eines Logarithmus hier vermeiden und verwende deshalb eine »einfachere« Beschreibung.

Die erste grundsätzliche Frage, die es zu klären gilt, ist: Welche Ziffern verwende ich für mein Zahlensystem? Im Dezimalsystem verwenden wir bekanntlich die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. In einem Oktalsystem werden die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 verwendet, im Dualsystem die Ziffern 0 und 1. Ich könnte also sinngemäß für mein spezielles System mit der Basis 4,37 die Ziffern 0, 1, 2 und 3 verwenden. Allerdings kratze ich mich nach kurzer Zeit am Kopf, wenn ich das umsetzen will, denn mir fehlt noch eine restliche Ziffer »3,37«, ... Diese könnte ich mir künstlich erschaffen, indem ich sie einfach mit einem beliebigen anderen Zeichen, z. B. dem Buchstaben K, benenne. Dadurch ergibt sich aber ein weiteres Problem, und zwar ein ziemlich unangenehmes: Der »Abstand« zwischen den einzelnen Ziffern ist nicht mehr gleich groß. In allen bekannten Systemen ist dieser Abstand nämlich immer genau 1:

$$\begin{aligned} 1&=0+1\\ 2&=1+1\\ 3&=2+1\\ 4&=3+1\\ &\vdots \end{aligned}$$

In unserem System wäre der Abstand zwischen der vorletzten Ziffer 3 und der letzten Ziffer K nur 0,37, während er zwischen allen anderen Ziffern jeweils 1 wäre. Das ist »unschön«. Ich sollte also eventuell den Wert der Ziffern so wählen, dass er jeweils gleich groß ist. Aber auch das ist alles andere als »schön«, da ich auf diese Weise keine »ganzen« Zahlen mehr darstellen kann. Wenn ich 4,37 auf 5 verschiedene Ziffern A, B, C, D und E so aufteile, dass deren Abstand zueinander gleich groß ist, ergibt das einen »Abstand« (in Dezimalschreibweise) von

$$\frac{4{,}37}{5}=0{,}874$$

Die einzelnen Ziffern hätten also einen Dezimalwert von

A = 0
B = 0,874
C = 1,748
D = 2,622
E = 3,496

Ich beschreibe nun ein kurzes Gedankenexperiment, um die Verwendung der Ziffern A bis E zu demonstrieren. Ich nehme an, dass direkt vor mir *kein* Hund steht. Dann kann ich auch sagen, vor mir stehen A Hunde, denn A hat den Wert 0. Stehen vor mir allerdings *ein* oder *zwei* Hunde, dann wird es lustig, wenn ich das mit meinem »schrägen« Zahlensystem ausdrücken will ... Denn es klingt ziemlich »schräg«, wenn ich sage: »Vor mir stehen B komma ACDB Hunde«, was aber tatsächlich im Zahlensystem 4,37 der korrekten Aussage entspräche, dass *ein* Hund vor mir steht.

Wir sehen, unsere »natürlichen Zahlen« – also die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... – sind nicht zufällig so benannt.

Zum Abschluss dieser Erläuterung sei noch erwähnt, dass ich für unser »schräges« Zahlensystem 5 Ziffern verwendet habe. Genausogut hätte ich 7 oder 13 verschiedene Ziffern verwenden können – ich hätte immer das Problem gehabt, damit keine »natürlichen Zahlen« auf brauchbare Weise ausdrücken zu können. Was ich definitiv *nicht* kann, ist 4,37 verschiedene Ziffern zu verwenden. Eine Ziffer ist nun mal so etwas wie ein konkreter »Gegenstand«, selbst wenn dieser nur in unseren Gedanken existiert. Eine Anzahl *konkreter Dinge* verlangt zwingend eine »natürliche Zahl«, um sie abzählen zu können. So etwas wie 3,81 Katzen kann es im Konkreten, in unserer »realen« Welt, nicht geben.

Kehren wir zurück zu unserem »schrägen« Zahlensystem. Ich hatte vorhin vorgeschlagen, für dieses System 5 verschiedene Ziffern zu verwenden. Es mussten *mindestens* 5 Ziffern sein, weil ich bei Verwendung von weniger als 5, also z. B. nur 4 Ziffern, nicht mehr alle natürlichen Zahlen darstellen könnte. Der »Abstand« zwischen zwei Ziffern darf nicht größer als 1 sein, da sonst »Lücken« im Zahlensystem entstehen würden. Bei Verwendung von nur 4 Ziffern wäre der Abstand zwischen den einzelnen Ziffern

$$\frac{4{,}37}{4} = 1{,}0925$$

und damit größer als 1. Die 4 Ziffern – nennen wir sie A, B, C und D – hätten folglich die Dezimalwerte

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 1{,}0925 \\ C &= 2{,}185 \\ D &= 3{,}2775 \end{aligned}$$

Die Potenzen unserer Basis 4,37 wären (in Dezimalziffern)

$$\begin{aligned} &\vdots \\ 4{,}37^{-4} &= 0{,}00274204\ldots \\ 4{,}37^{-3} &= 0{,}01198273\ldots \\ 4{,}37^{-2} &= 0{,}05236452\ldots \\ 4{,}37^{-1} &= 0{,}22883295\ldots \\ 4{,}37^{0} &= 1 \\ 4{,}37^{1} &= 4{,}37 \\ 4{,}37^{2} &= 19{,}0969 \\ 4{,}37^{3} &= 83{,}453453 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ein Beispiel: Die (Dezimal-)Zahl 12, mit unseren 4 Ziffern geschrieben, lautet:

CC,BABB...

Wie habe ich das umgerechnet? Ich habe damit begonnen, die höchste Stelle in meinem System zu suchen, das ist in unserem Fall die 2. Stelle links vom Komma. Dort stehen die Ziffern, die mit der 1. Potenz der Basis multipliziert werden müssen. Eine weitere Stelle links vom Komma (an der 3. Stelle) stehen die Ziffern, die mit der 2. Potenz multipliziert werden müssen, das wäre in unserem Fall $4{,}37^2 = 19{,}0969$, eine Zahl, die bereits größer als die gesuchte Zahl 12 ist. An der 2. Stelle muss also eine Ziffer stehen, die mit der 1. Potenz der Basis multipliziert einen kleineren Betrag als 12 liefert. – Konkret: Ich probiere aus

$$D \cdot 4{,}37^1 = 3{,}2775 \cdot 4{,}37 = 14{,}322675$$

Das ist größer als 12, also nehme ich die nächstkleinere Ziffer C:

$$C \cdot 4{,}37^1 = 2{,}185 \ \cdot 4{,}37 = 9{,}54845$$

Das passt. An der 2. Stelle steht also die Ziffer C. Zur Zahl 12 fehlt jetzt noch die Differenz 12 – 9,54845 = 2,45155. Welche Ziffer kommt nun an die 1. Stelle links vom Komma? Dort stehen die Ziffern, die mit der nullten Potenz der Basis multipliziert werden müssen – also mit 1. Die Ziffer D = 3,2775 ist wieder zu groß, die Ziffer C=2,185 ist kleiner, wir schreiben also C an die 1. Stelle links vom Komma. Unsere Zahl lautet nun CC. Sie ist aber noch ziemlich ungenau, also berechnen wir auch noch ein paar Stellen rechts vom Komma, bis wir ein ausreichend genaues Ergebnis erhalten. Bisher haben wir

$$CC = 2{,}185 \cdot 4{,}37 + 2{,}185 \cdot 1 = 9{,}54845 + 2{,}185 = 11{,}73345$$

Es fehlen also noch 12 – 11,73345 = 0,26655. An der Stelle rechts vom Komma stehen die Ziffern, die mit der –1. Potenz (»*minus ersten Potenz*«) der Basis multipliziert werden müssen, also mit $4{,}37^{-1} = 0{,}22883295$. Ich wähle die Ziffer B, denn B = 1,0925 und somit $B \cdot 4{,}37^{-1} = 1{,}0925 \ \cdot 0{,}22883295 = 0{,}25$. Das ist nur wenig kleiner als 0,26655 und ist somit die richtige Ziffer für diese Stelle. Unser Ergebnis ist nun also bereits auf 1 Stelle nach dem Komma genau: CC,B

Es fehlen uns jetzt auf die Zahl 12 nur noch 0,26655 – 0,25 = 0,01655. Gibt es an der 2. Stelle rechts vom Komma eine Ziffer, deren Wert kleiner als 0,01655 ist? Nein. Also schreiben wir an dieser Stelle die Ziffer A (die den Wert 0 hat) hin. An der 3. Stelle rechts vom Komma gibt es dann eine Ziffer, die kleiner als 0,01655 ist, nämlich $B \cdot 4{,}37^{-3} = 1{,}0925 \ \cdot 0{,}01198273 = 0{,}013091133$. Unsere gesuchte Zahl ist nun auf bereits 3 Stellen nach dem Komma genau: CC,BAB

Die Differenz zu 12 beträgt jetzt nur noch 12 – 0,013091133 = 0,003458867. An der 4. Stelle nach dem Komma kommt also wieder die Ziffer B, denn
$B \cdot 4{,}37^{-4} = 1{,}0925 \ \cdot 0{,}00274204 = 0{,}00299568$. Die Differenz zu 12 schrumpft weiter auf 0,003458867 – 0,00299568 = 0,000463187. Unser Ergebnis lautet jetzt bereits recht genau CC,BABB.

Da wir nun die Methode des Umrechnens kennen, können wir uns ein weiteres Beispiel anschauen – nehmen wir die (Dezimal-)Zahl 18,8.

Die höchste Stelle ist die 2. Stelle links vom Komma, da 18,8 kleiner als $4{,}37^2 = 19{,}0969$ ist. Es kommt dort die Ziffer D hin, es bleibt der Rest

$$18{,}8 - D \cdot 4{,}37^1 = 18{,}8 - 3{,}2775 \cdot 4{,}37 = 18{,}8 - 14{,}322675 = 4{,}477325$$

Dieser Rest ist nun aber größer als die Basiszahl 4,37 und ich habe keine Möglichkeit, die »Lücke« zwischen dem Rest 4,477325 und der Basis 4,37 mit Ziffern rechts von der 2. Stelle aufzufüllen. Der Grund für das Entstehen einer Lücke ist die Tatsache, dass der »Abstand« zwischen den Ziffern A, B, C und D jeweils größer als 1 ist. Eine Darstellung *aller* Zahlen funktioniert nur, wenn der Abstand zwischen den Ziffern kleiner oder höchstens gleich 1 ist.

Das einfachste Zahlensystem, das wir kennen, ist das *Dualsystem*, das nur die beiden Ziffern 0 und 1 verwendet und mit dem unsere Computer rechnen. Diese können deshalb so schnell rechnen, weil das Rechnen durch extrem schnell aufeinander folgende Ein- und Ausschaltvorgänge von winzigen elektronischen Schaltern geschieht. 1 bedeutet »eingeschaltet«, 0 bedeutet »ausgeschaltet«. Die meisten der heute verwendeten Rechner führen etwa 2 bis 4 Milliarden Schaltvorgänge pro Sekunde aus. Und da in den Prozessoren meistens 64 Stellen gleichzeitig (parallel) berechnet werden, erhöht das die Rechengeschwindigkeit nochmals beträchtlich.

Das Dualsystem hat den Vorteil, dass auch »komplizierte« Berechnungen wie eine Multiplikation durch einfaches »Verschieben« von Zahlen und anschließender Addition durchgeführt werden können. Für eine Addition von zwei Dualziffern brauche ich nur 4 mögliche »Zustände« zu berücksichtigen: 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1 und 1 + 1 = 0 mit einem Übertrag von 1. So etwas Einfaches lässt sich in einem Computer-Chip »fest verdrahten« und damit extrem schnell berechnen.

Wir haben beim Dualsystem gesehen, dass wir dort im Grunde gar keine Ziffern mehr benötigt haben. Denn die Ziffern 0 und 1 könnte man genausogut als JA und NEIN oder EIN und AUS bezeichnen. Wichtig in diesem System war nur, ob an einer bestimmten Stelle im Stellenwertsystem eine 1 (oder JA oder EIN) vorhanden war. An diesen Stellen stand dann die jeweilige Potenz der Basis 2. Bei einer 0 (oder NEIN oder AUS) stand dort *nichts* bzw. eine 0.

Wird die Basis kleiner als 2, funktioniert dieses Prinzip immer noch. Wir können unsere Ziffern 0 und 1 beibehalten – die 1 bedeutet dann nichts Anderes, als dass an dieser Stelle die jeweilige Potenz der Basiszahl steht, die 0 bedeutet weiterhin, dass dort *nichts* steht. Ich werde das an einem Beispiel demonstrieren.

Die Dezimalzahl 13,6 soll in ein System mit der Basis 1,4 umgerechnet werden.

Als Erstes erstelle ich eine Tabelle mit den Potenzen der Basiszahl:

$$\begin{aligned}
&\vdots\\
1{,}4^{8} &= 14{,}75789056\\
1{,}4^{7} &= 10{,}5413504\\
1{,}4^{6} &= 7{,}529536\\
1{,}4^{5} &= 5{,}37824\\
1{,}4^{4} &= 3{,}8416\\
1{,}4^{3} &= 2{,}744\\
1{,}4^{2} &= 1{,}96\\
1{,}4^{1} &= 1{,}4\\
1{,}4^{0} &= 1\\
1{,}4^{-1} &= 0{,}71428571\\
1{,}4^{-2} &= 0{,}51020408\\
1{,}4^{-3} &= 0{,}36443149\\
1{,}4^{-4} &= 0{,}26030820\\
1{,}4^{-5} &= 0{,}18593443\\
1{,}4^{-6} &= 0{,}13281031\\
1{,}4^{-7} &= 0{,}09486451\\
1{,}4^{-8} &= 0{,}06776036\\
1{,}4^{-9} &= 0{,}04840026\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Anschließend suche ich die höchste Stelle, die noch kleiner ist als meine gesuchte Zahl. Das ist die Stelle mit der Potenz 7, deren Wert 10,5413504 ist. An die 8. Stelle links vom Komma kommt also eine 1:

$$1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ .\ .$$

Die Differenz zur Zahl 13,6 beträgt nun 13,6 – 10,5413504 = 3,0586496. Da die Potenzwerte an den nächsten Stellen (mit den Potenzen 6, 5 und 4) alle größer als diese Differenz sind, kommt an diese Stellen jeweils eine 0 und erst dann wieder eine 1:

$$10001\ .\ .\ .\ ,\ .\ .$$

Die Differenz zu 13,6 beträgt nun noch 13,6 – 10,5413504 – 2,744 = 0,3146496. Den nächstkleineren Potenzwert finde ich erst an der Stelle mit der Potenz –4. Ich fülle also alle oberhalb dieser Potenz liegenden Stellen mit Nullen auf und an die Stelle mit der Potenz –4 kommt eine 1:

$$10001000{,}0001_{1{,}4}$$

Die Differenz zu unserer gesuchten Zahl beträgt somit nur noch 13,6 – 10,5413504 – 2,744 – 0,2603082 = 0,0543414. Will ich noch genauer rechnen, dann muss ich mir nur den nächstkleineren Potenzwert aus meiner Tabelle suchen, dieser steht an der Stelle mit der Potenz –9. Die dazwischenliegenden Stellen kann ich wieder mit Nullen auffüllen:

$$10001000{,}000100001_{1{,}4}$$

Ich mache die Probe und rechne:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1{,}4^{7} & + & 1{,}4^{3} & + & 1{,}4^{-4} & + & 1{,}4^{-9} & = & \\ 10{,}5413504 & + & 2{,}744 & + & 0{,}2603082 & + & 0{,}04840026 & = & 13{,}59405886 \end{array}$$

Wir liegen damit bereits sehr nahe an unserer gesuchten Zahl. Die Rechengenauigkeit würde durch das Hinzunehmen weiterer Stellen natürlich noch steigen.

Bei den Zahlen mit den Nullen und Einsen habe ich die Basis des Zahlensystems in Form einer kleinen, tiefergestellten Zahl dazugeschrieben. Dadurch besteht keine Verwechslungsgefahr mit einer Zahl im Dualsystem, die ja ebenfalls nur aus Nullen und Einsen besteht.

Nur so zum Spaß rechne ich dieselbe Zahl 13,6 noch in zwei weitere Systeme um, deren Basis jeweils kleiner als 2 ist: Ich nehme einmal die Basis 1,2 und einmal die Basis 1,8. Beginnen wir mit dem kleineren Wert 1,2.

Rechts von hier sieht man die Tabelle mit den Potenzen.

Was uns sehr schnell auffällt, ist die Größe der Tabelle. Obwohl der größte und der kleinste Dezimalwert ähnlich groß sind wie in unserer Tabelle mit der Basis 1,4, brauchen wir viel mehr Zeilen. Sie »wächst langsamer«, da der jeweilige Wert statt um den Faktor 1,4 nur noch um den Faktor 1,2 ansteigt. Ansonsten ist aber kein wesentlicher Unterschied zu erkennen.

Die einzelnen Rechenschritte für das Berechnen der Zahl im System mit der Basis 1,2 liste ich hier nicht auf, sondern schreibe gleich das Ergebnis hin (wer Lust hat, kann es nachrechnen):

$$100000000000000{,}010000000000001_{1,2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1{,}2^{14} & + & 1{,}2^{-2} & + & 1{,}2^{-15} & = & \\ 12{,}8391846 & + & 0{,}6944444 & + & 0{,}06490547 & = & 13{,}5985346 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
1{,}2^{15} &= 15{,}40702157 \\
1{,}2^{14} &= 12{,}83918465 \\
1{,}2^{13} &= 10{,}69932054 \\
1{,}2^{12} &= 8{,}91610045 \\
1{,}2^{11} &= 7{,}43008371 \\
1{,}2^{10} &= 6{,}19173642 \\
1{,}2^{9} &= 5{,}15978035 \\
1{,}2^{8} &= 4{,}29981696 \\
1{,}2^{7} &= 3{,}5831808 \\
1{,}2^{6} &= 2{,}985984 \\
1{,}2^{5} &= 2{,}48832 \\
1{,}2^{4} &= 2{,}0736 \\
1{,}2^{3} &= 1{,}728 \\
1{,}2^{2} &= 1{,}44 \\
1{,}2^{1} &= 1{,}2 \\
1{,}2^{0} &= 1 \\
1{,}2^{-1} &= 0{,}83333333 \\
1{,}2^{-2} &= 0{,}69444444 \\
1{,}2^{-3} &= 0{,}57870370 \\
1{,}2^{-4} &= 0{,}48225309 \\
1{,}2^{-5} &= 0{,}40187757 \\
1{,}2^{-6} &= 0{,}33489798 \\
1{,}2^{-7} &= 0{,}27908165 \\
1{,}2^{-8} &= 0{,}23256804 \\
1{,}2^{-9} &= 0{,}19380670 \\
1{,}2^{-10} &= 0{,}16150558 \\
1{,}2^{-11} &= 0{,}13458799 \\
1{,}2^{-12} &= 0{,}11215666 \\
1{,}2^{-13} &= 0{,}09346388 \\
1{,}2^{-14} &= 0{,}07788657 \\
1{,}2^{-15} &= 0{,}06490547 \\
1{,}2^{-16} &= 0{,}05408789 \\
1{,}2^{-17} &= 0{,}04507324 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Tabelle mit den Potenzwerten der Basis 1,8 sieht wie folgt aus:

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
1{,}8^{5} &= 18{,}89568\\
1{,}8^{4} &= 10{,}4976\\
1{,}8^{3} &= 5{,}832\\
1{,}8^{2} &= 3{,}24\\
1{,}8^{1} &= 1{,}8\\
1{,}8^{0} &= 1\\
1{,}8^{-1} &= 0{,}55555556\\
1{,}8^{-2} &= 0{,}30864198\\
1{,}8^{-3} &= 0{,}17146776\\
1{,}8^{-4} &= 0{,}09525987\\
1{,}8^{-5} &= 0{,}05292215\\
1{,}8^{-6} &= 0{,}02940119\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Wie zu erwarten war, ist sie viel kleiner als die Tabelle für die Werte mit der Basis 1,2. Die errechnete Zahl ist

$$10011{,}001101_{1,8}$$

$$
\begin{array}{l}
1{,}8^{4} + 1{,}8^{1} + 1{,}8^{0} + 1{,}8^{-3} + 1{,}8^{-4} + 1{,}8^{-6} =\\
10{,}4976 + 1{,}8 + 1 + 0{,}17146776 + 0{,}09525987 + 0{,}02940119 = 13{,}5937288
\end{array}
$$

Bei der Umrechnung in ein Zahlensystem mit einer Basis kleiner als 2 ist mir Folgendes aufgefallen:

Ich kann die meisten Zahlen auf verschiedene Weise hinschreiben, und dennoch bleibt ihr Wert gleich! Diese Behauptung ist im ersten Moment verblüffend und sollte unbedingt näher erklärt werden. Ich nehme das Beispiel mit der Basis 1,2 her, für das wir folgendes Ergebnis erhalten haben:

$$100000000000000{,}010000000000001_{1,2}$$

Diese Zahl hätte ich genausogut auf folgende Weise hinschreiben können:

$$11000001000{,}000001000001001_{1,2}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1{,}2^{10}+ & 1{,}2^{9}+ & 1{,}2^{3}+ & 1{,}2^{-6}+ & 1{,}2^{-12}+ & 1{,}2^{-15}= \\ 6{,}19173642+ & 5{,}15978035+ & 1{,}728+ & 0{,}33489798+ & 0{,}11215666+ & 0{,}06490547 = \\ & & & & & 13{,}59147688 \end{array}$$

Oder auf die folgende Weise:

$$1000010000001{,}00000000000000011_{1,2}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1{,}2^{12}+ & 1{,}2^{7}+ 1{,}2^{0}+ & 1{,}2^{-16}+ & 1{,}2^{-17}= & \\ 8{,}91610045+ & 3{,}5831808+1 \quad + & 0{,}05408789+ & 0{,}04507324 = & 13{,}59844238 \end{array}$$

Und auf noch viele andere Weisen ... Immer hätte das Ergebnis ziemlich genau dem Wert der Dezimalzahl 13,6 entsprochen. Je kleiner ich die Basiszahl wähle, desto mehr Möglichkeiten gibt es, den gleichen Zahlenwert auszudrücken. Wir können auch sagen: Desto mehr *Redundanz* ist im System enthalten. Zahlensysteme, deren Basis auf einer ganzen Zahl beruht, haben *keine* Redundanz, d. h. ich kann jeden Zahlenwert nur auf genau eine Weise hinschreiben.

Ich unternehme nun einen Versuch. Ich möchte herausfinden, auf wie viele unterschiedliche Arten ich einen bestimmten Zahlenwert aufschreiben kann. Ich probiere das auf's Geratewohl mit der (Dezimal-)Zahl **12** und rechne sie in unterschiedliche Zahlensysteme um, deren Basiswert jeweils kleiner als 2 ist. In Bezug auf die Rechengenauigkeit begnüge ich mich damit, dass der Absolutwert der Abweichung vom exakten Ergebnis jeweils kleiner als 1 ist.

Als Basiswerte nehme ich 1,9, 1,8, 1,7, 1,6, 1,5, 1,4, 1,3 und 1,2.

Die entsprechenden Potenzentabellen sehen wie folgt aus:

$$
\begin{array}{llll}
1{,}9^4 = 13{,}0321 & 1{,}8^5 = 18{,}89568 & 1{,}7^5 = 14{,}19857 & 1{,}6^6 = 16{,}77722 \\
1{,}9^3 = 6{,}859 & 1{,}8^4 = 10{,}4976 & 1{,}7^4 = 8{,}3521 & 1{,}6^5 = 10{,}48576 \\
1{,}9^2 = 3{,}61 & 1{,}8^3 = 5{,}832 & 1{,}7^3 = 4{,}913 & 1{,}6^4 = 6{,}5536 \\
1{,}9^1 = 1{,}9 & 1{,}8^2 = 3{,}24 & 1{,}7^2 = 2{,}89 & 1{,}6^3 = 4{,}096 \\
1{,}9^0 = 1 & 1{,}8^1 = 1{,}8 & 1{,}7^1 = 1{,}7 & 1{,}6^2 = 2{,}56 \\
 & 1{,}8^0 = 1 & 1{,}7^0 = 1 & 1{,}6^1 = 1{,}6 \\
 & & & 1{,}6^0 = 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
1{,}5^7 = 17{,}08594 & 1{,}4^8 = 14{,}75789 & 1{,}3^{10} = 13{,}78585 & 1{,}2^{14} = 12{,}83918 \\
1{,}5^6 = 11{,}39063 & 1{,}4^7 = 10{,}54135 & 1{,}3^9 = 10{,}60450 & 1{,}2^{13} = 10{,}69932 \\
1{,}5^5 = 7{,}59375 & 1{,}4^6 = 7{,}52954 & 1{,}3^8 = 8{,}15731 & 1{,}2^{12} = 8{,}91610 \\
1{,}5^4 = 5{,}0625 & 1{,}4^5 = 5{,}37824 & 1{,}3^7 = 6{,}27485 & 1{,}2^{11} = 7{,}43008 \\
1{,}5^3 = 3{,}375 & 1{,}4^4 = 3{,}8416 & 1{,}3^6 = 4{,}82681 & 1{,}2^{10} = 6{,}19174 \\
1{,}5^2 = 2{,}25 & 1{,}4^3 = 2{,}744 & 1{,}3^5 = 3{,}71293 & 1{,}2^9 = 5{,}15978 \\
1{,}5^1 = 1{,}5 & 1{,}4^2 = 1{,}96 & 1{,}3^4 = 2{,}8561 & 1{,}2^8 = 4{,}29982 \\
1{,}5^0 = 1 & 1{,}4^1 = 1{,}4 & 1{,}3^3 = 2{,}197 & 1{,}2^7 = 3{,}58318 \\
 & 1{,}4^0 = 1 & 1{,}3^2 = 1{,}69 & 1{,}2^6 = 2{,}98598 \\
 & & 1{,}3^1 = 1{,}3 & 1{,}2^5 = 2{,}48832 \\
 & & 1{,}3^0 = 1 & 1{,}2^4 = 2{,}0736 \\
 & & & 1{,}2^3 = 1{,}728 \\
 & & & 1{,}2^2 = 1{,}44 \\
 & & & 1{,}2^1 = 1{,}2 \\
 & & & 1{,}2^0 = 1
\end{array}
$$

Basis **1,9** (2 Möglichkeiten):

$$1110_{1,9} = 1{,}9^3 + 1{,}9^2 + 1{,}9^1 = 6{,}859 + 3{,}61 + 1{,}9 = 12{,}369$$
$$1101_{1,9} = 1{,}9^3 + 1{,}9^2 + 1{,}9^0 = 6{,}859 + 3{,}61 + 1 = 11{,}469$$

Basis **1,8** (2 Möglichkeiten):

$$10010_{1,8} = 1{,}8^4 + 1{,}8^1 = 10{,}4976 + 1{,}8 = 12{,}2976$$
$$10001_{1,8} = 1{,}8^4 + 1{,}8^0 = 10{,}4976 + 1 = 11{,}4976$$

Basis **1,7** (2 Möglichkeiten):

$$10111_{1,7} = 1{,}7^4 + 1{,}7^2 + 1{,}7^1 + 1{,}7^0 = 8{,}3521 + 2{,}89 + 1{,}7 + 1 = 12{,}9421$$
$$10110_{1,7} = 1{,}7^4 + 1{,}7^2 + 1{,}7^1 = 8{,}3521 + 2{,}89 + 1{,}7 = 11{,}9421$$

Basis **1,6** (4 Möglichkeiten):

$$100010_{1,6} = 1{,}6^5 + 1{,}6^1 = 10{,}48576 + 1{,}6 = 12{,}08576$$
$$11010_{1,6} = 1{,}6^4 + 1{,}6^3 + 1{,}6^1 = 6{,}5536 + 4{,}096 + 1{,}6 = 12{,}2496$$
$$11001_{1,6} = 1{,}6^4 + 1{,}6^3 + 1{,}6^0 = 6{,}5536 + 4{,}096 + 1 = 11{,}6496$$
$$10111_{1,6} = 1{,}6^4 + 1{,}6^2 + 1{,}6^1 = 6{,}5536 + 2{,}56 + 1{,}6 + 1 = 11{,}7136$$

Basis **1,5** (9 Möglichkeiten):

$1000001_{1,5} = 12{,}39063$	$101010_{1,5} = 12{,}46875$	$100111_{1,5} = 12{,}34375$
$1000000_{1,5} = 11{,}39063$	$101001_{1,5} = 11{,}96875$	$11110_{1,5} = 12{,}1875$
$110000_{1,5} = 12{,}65625$	$100110_{1,5} = 11{,}34375$	$11101_{1,5} = 11{,}6875$

Basis **1,4** (22 Möglichkeiten):

$10000100_{1,4} = 12{,}50135$	$1001100_{1,4} = 12{,}23354$	$110110_{1,4} = 12{,}57984$
$10000011_{1,4} = 12{,}94135$	$1001011_{1,4} = 12{,}67354$	$110101_{1,4} = 12{,}17984$
$10000010_{1,4} = 11{,}94135$	$1001010_{1,4} = 11{,}67354$	$110100_{1,4} = 11{,}17984$
$10000001_{1,4} = 11{,}54135$	$1001001_{1,4} = 11{,}27354$	$110011_{1,4} = 11{,}61984$
$1100000_{1,4} = 12{,}90778$	$1000111_{1,4} = 11{,}88954$	$101111_{1,4} = 12{,}84224$
$1010010_{1,4} = 12{,}77114$	$111001_{1,4} = 12{,}96384$	$101110_{1,4} = 11{,}84224$
$1010001_{1,4} = 12{,}37114$	$111000_{1,4} = 11{,}96384$	$101101_{1,4} = 11{,}44224$
$1010000_{1,4} = 11{,}37114$		

Basis **1,3** (48 Möglichkeiten):

$1000001000_{1,3}= 12{,}80150$	$10110000_{1,3}= 12{,}84388$	$1101100_{1,3}= 12{,}42674$
$1000000100_{1,3}= 12{,}29450$	$10101000_{1,3}= 12{,}18478$	$1101010_{1,3}= 12{,}03674$
$1000000011_{1,3}= 12{,}90450$	$10100110_{1,3}= 12{,}97778$	$1101001_{1,3}= 11{,}73674$
$1000000010_{1,3}= 11{,}90450$	$10100101_{1,3}= 12{,}67778$	$1100111_{1,3}= 12{,}52974$
$1000000001_{1,3}= 11{,}60450$	$10100100_{1,3}= 11{,}67778$	$1100110_{1,3}= 11{,}52974$
$101000000_{1,3}= 12{,}98412$	$10100011_{1,3}= 12{,}28778$	$1011110_{1,3}= 12{,}86991$
$100100001_{1,3}= 12{,}87024$	$10100010_{1,3}= 11{,}28778$	$1011101_{1,3}= 12{,}56991$
$100100000_{1,3}= 11{,}87024$	$10011010_{1,3}= 12{,}62795$	$1011100_{1,3}= 11{,}56991$
$100010100_{1,3}= 12{,}70341$	$10011001_{1,3}= 12{,}32795$	$1011011_{1,3}= 12{,}17991$
$100010010_{1,3}= 12{,}31341$	$10011000_{1,3}= 11{,}32795$	$1011010_{1,3}= 11{,}17991$
$100001100_{1,3}= 12{,}04431$	$10010110_{1,3}= 12{,}12095$	$1010111_{1,3}= 11{,}67291$
$100000111_{1,3}= 12{,}14731$	$10010101_{1,3}= 11{,}82095$	$1001111_{1,3}= 11{,}01381$
$100000110_{1,3}= 11{,}14731$	$10010011_{1,3}= 11{,}43095$	$111111_{1,3}= 12{,}75603$
$11000010_{1,3}= 12{,}40166$	$10001111_{1,3}= 12{,}46185$	$111110_{1,3}= 11{,}75603$
$11000001_{1,3}= 12{,}10166$	$10001110_{1,3}= 11{,}46185$	$111101_{1,3}= 11{,}45603$
$11000000_{1,3}= 11{,}10166$	$1110010_{1,3}= 12{,}69584$	$111011_{1,3}= 11{,}06603$

Basis **1,2** (273 Möglichkeiten):

$10000000000011_{1,2}$= 12,89932
$10000000000010_{1,2}$= 11,89932
$10000000000001_{1,2}$= 11,69932
$1000010000000_{1,2}$= 12,49928
$1000001000001_{1,2}$= 12,90208
$1000001000000_{1,2}$= 11,90208
$1000000100100_{1,2}$= 12,84442
$1000000100010_{1,2}$= 12,60442
$1000000100001_{1,2}$= 12,40442
$1000000100000_{1,2}$= 11,40442
$1000000011000_{1,2}$= 12,71770
$1000000010100_{1,2}$= 12,42970
$1000000010010_{1,2}$= 12,18970
$1000000010001_{1,2}$= 11,98970
$1000000001100_{1,2}$= 12,08410
$1000000001011_{1,2}$= 12,84410
$1000000001010_{1,2}$= 11,84410
$1000000001001_{1,2}$= 11,64410
$1000000000111_{1,2}$= 12,55610
$1000000000110_{1,2}$= 11,55610
$1000000000101_{1,2}$= 11,35610
$1000000000011_{1,2}$= 11,11610
$101000000000_{1,2}$= 12,58986
$100100000010_{1,2}$= 12,92990
$100100000001_{1,2}$= 12,72990
$100100000000_{1,2}$= 11,72990
$100010001000_{1,2}$= 12,74126
$100010000100_{1,2}$= 12,45326
$100010000010_{1,2}$= 12,21326
$100010000001_{1,2}$= 12,01326
$100010000000_{1,2}$= 11,01326
$100001100000_{1,2}$= 12,90438
$100001010000_{1,2}$= 12,48966
$100001001000_{1,2}$= 12,14406
$100001000101_{1,2}$= 12,85606
$100001000100_{1,2}$= 11,85606
$100001000011_{1,2}$= 12,61606
$100001000010_{1,2}$= 11,61606
$100001000001_{1,2}$= 11,41606
$100000110001_{1,2}$= 12,99200
$100000110000_{1,2}$= 11,99200
$100000101010_{1,2}$= 12,84640
$100000101001_{1,2}$= 12,64640
$100000101000_{1,2}$= 11,64640
$100000100110_{1,2}$= 12,55840
$100000100101_{1,2}$= 12,35840
$100000100100_{1,2}$= 11,35840
$100000100011_{1,2}$= 12,11840
$100000100010_{1,2}$= 11,11840
$100000011100_{1,2}$= 12,67168
$100000011010_{1,2}$= 12,43168
$100000011001_{1,2}$= 12,23168
$100000011000_{1,2}$= 11,23168
$100000010110_{1,2}$= 12,14368
$100000010101_{1,2}$= 11,94368
$100000010011_{1,2}$= 11,70368
$100000001111_{1,2}$= 12,79808
$100000001110_{1,2}$= 11,79808
$100000001101_{1,2}$= 12,59808
$100000001100_{1,2}$= 11,59808
$100000001011_{1,2}$= 11,35808
$100000000111_{1,2}$= 11,07008
$11000000100_{1,2}$= 12,79152
$11000000010_{1,2}$= 12,55152
$11000000001_{1,2}$= 12,35152
$11000000000_{1,2}$= 11,35152
$10100000101_{1,2}$= 12,93156
$10100000100_{1,2}$= 11,93156
$10100000011_{1,2}$= 12,69156
$10100000010_{1,2}$= 11,69156
$10100000001_{1,2}$= 11,49156
$10010010001_{1,2}$= 12,84852
$10010010000_{1,2}$= 11,84852
$10010001100_{1,2}$= 12,94292
$10010001010_{1,2}$= 12,70292
$10010001001_{1,2}$= 12,50292
$10010001000_{1,2}$= 11,50292
$10010000110_{1,2}$= 12,41492
$10010000101_{1,2}$= 12,21492
$10010000100_{1,2}$= 11,21492
$10010000011_{1,2}$= 11,97492
$10001100010_{1,2}$= 12,86604
$10001100001_{1,2}$= 12,66604
$10001100000_{1,2}$= 11,66604
$10001011000_{1,2}$= 12,97932
$10001010100_{1,2}$= 12,69132
$10001010010_{1,2}$= 12,45132
$10001010001_{1,2}$= 12,25132
$10001010000_{1,2}$= 11,25132
$10001001100_{1,2}$= 12,34572
$10001001010_{1,2}$= 12,10572
$10001001001_{1,2}$= 11,90572
$10001000111_{1,2}$= 12,32006
$10001000110_{1,2}$= 11,32006
$10001000101_{1,2}$= 11,12006
$10000111000_{1,2}$= 12,48166
$10000110100_{1,2}$= 12,19366
$10000110011_{1,2}$= 12,95366
$10000110010_{1,2}$= 11,95366
$10000110001_{1,2}$= 11,75366
$10000101101_{1,2}$= 12,84806
$10000101100_{1,2}$= 11,84806
$10000101011_{1,2}$= 12,60806
$10000101010_{1,2}$= 11,60806
$10000101001_{1,2}$= 11,40806
$10000100111_{1,2}$= 12,32006
$10000100110_{1,2}$= 11,32006
$10000100101_{1,2}$= 11,12006
$10000011110_{1,2}$= 12,63334
$10000011101_{1,2}$= 12,43334
$10000011100_{1,2}$= 11,43334
$10000011011_{1,2}$= 12,19334
$10000011010_{1,2}$= 11,19334
$10000010111_{1,2}$= 11,90534
$10000001111_{1,2}$= 11,55974
$1101000000_{1,2}$= 12,44558
$1100100001_{1,2}$= 12,94792
$1100100000_{1,2}$= 11,94792
$1100010100_{1,2}$= 12,97320
$1100010010_{1,2}$= 12,73320
$1100010001_{1,2}$= 12,53320
$1100010000_{1,2}$= 11,53320
$1100001100_{1,2}$= 12,62760
$1100001010_{1,2}$= 12,38760
$1100001001_{1,2}$= 12,18760
$1100001000_{1,2}$= 11,18760

Basis 1,2 – Fortsetzung:

$1100000110_{1,2}$= 12,09960	$1000111100_{1,2}$= 12,88970	$101101100_{1,2}$= 12,94212
$1100000101_{1,2}$= 11,89960	$1000111010_{1,2}$= 12,64970	$101101010_{1,2}$= 12,70212
$1100000011_{1,2}$= 11,65960	$1000111001_{1,2}$= 12,44970	$101101001_{1,2}$= 12,50212
$1011000010_{1,2}$= 12,92895	$1000111000_{1,2}$= 11,44970	$101101000_{1,2}$= 11,50212
$1011000001_{1,2}$= 12,72895	$1000110110_{1,2}$= 12,36170	$101100110_{1,2}$= 12,41412
$1011000000_{1,2}$= 11,72895	$1000110101_{1,2}$= 12,16170	$101100101_{1,2}$= 12,21412
$1010101000_{1,2}$= 12,95928	$1000110100_{1,2}$= 11,16170	$101100100_{1,2}$= 11,21412
$1010100100_{1,2}$= 12,67128	$1000110011_{1,2}$= 11,92170	$101100011_{1,2}$= 11,97412
$1010100010_{1,2}$= 12,43128	$1000101110_{1,2}$= 12,01610	$101011100_{1,2}$= 12,52740
$1010100001_{1,2}$= 12,23128	$1000101101_{1,2}$= 11,81610	$101011010_{1,2}$= 12,28740
$1010100000_{1,2}$= 11,23128	$1000101011_{1,2}$= 11,57610	$101011001_{1,2}$= 12,08740
$1010011000_{1,2}$= 12,54456	$1000100111_{1,2}$= 11,28810	$101011000_{1,2}$= 11,08740
$1010010100_{1,2}$= 12,25656	$1000011111_{1,2}$= 12,60138	$101010111_{1,2}$= 12,99940
$1010010010_{1,2}$= 12,01656	$1000011110_{1,2}$= 11,60138	$101010110_{1,2}$= 11,99940
$1010010001_{1,2}$= 11,81656	$1000011101_{1,2}$= 11,40138	$101010101_{1,2}$= 11,79940
$1010001101_{1,2}$= 12,91096	$1000011011_{1,2}$= 11,16138	$101010011_{1,2}$= 11,55940
$1010001100_{1,2}$= 11,91096	$111010000_{1,2}$= 12,94258	$101001111_{1,2}$= 12,65380
$1010001010_{1,2}$= 11,67096	$111001000_{1,2}$= 12,59698	$101001110_{1,2}$= 11,65380
$1010001001_{1,2}$= 11,47096	$111000100_{1,2}$= 12,30898	$101001101_{1,2}$= 11,45380
$1010000111_{1,2}$= 12,38296	$111000010_{1,2}$= 12,06898	$101001010_{1,2}$= 11,21380
$1010000110_{1,2}$= 11,38296	$111000001_{1,2}$= 11,86898	$101001001_{1,2}$= 11,01380
$1010000101_{1,2}$= 11,18296	$110110000_{1,2}$= 12,44492	$100111100_{1,2}$= 12,02974
$1001110000_{1,2}$= 12,70768	$110101000_{1,2}$= 12,09932	$100111010_{1,2}$= 11,78974
$1001101000_{1,2}$= 12,36208	$110100101_{1,2}$= 12,81132	$100111001_{1,2}$= 11,58974
$1001100100_{1,2}$= 12,07408	$110100100_{1,2}$= 11,81132	$100110111_{1,2}$= 12,50174
$1001100011_{1,2}$= 12,83408	$110100010_{1,2}$= 11,57132	$100110110_{1,2}$= 11,50174
$1001100010_{1,2}$= 11,83408	$110100001_{1,2}$= 11,37132	$100110101_{1,2}$= 11,30174
$1001100001_{1,2}$= 11,63408	$110011010_{1,2}$= 12,88460	$100110011_{1,2}$= 11,06174
$1001011001_{1,2}$= 12,94736	$110011001_{1,2}$= 12,68460	$100101111_{1,2}$= 12,15614
$1001011000_{1,2}$= 11,94736	$110011000_{1,2}$= 11,68460	$100101110_{1,2}$= 11,15614
$1001010110_{1,2}$= 12,85936	$110010110_{1,2}$= 12,59660	$100011111_{1,2}$= 11,74142
$1001010101_{1,2}$= 12,65936	$110010101_{1,2}$= 12,39660	$11111000_{1,2}$= 12,85908
$1001010100_{1,2}$= 11,65936	$110010100_{1,2}$= 11,39660	$11110100_{1,2}$= 12,57108
$1001010011_{1,2}$= 12,41936	$110010011_{1,2}$= 12,15660	$11110010_{1,2}$= 12,33108
$1001010010_{1,2}$= 11,41936	$110010010_{1,2}$= 11,15660	$11110001_{1,2}$= 12,13108
$1001010001_{1,2}$= 11,21936	$110001110_{1,2}$= 12,25100	$11110000_{1,2}$= 11,13108
$1001001110_{1,2}$= 12,51376	$110001101_{1,2}$= 12,05100	$11101100_{1,2}$= 12,22548
$1001001101_{1,2}$= 12,31376	$110001100_{1,2}$= 11,05100	$11101011_{1,2}$= 12,98548
$1001001100_{1,2}$= 11,31376	$110001011_{1,2}$= 11,81100	$11101010_{1,2}$= 11,98548
$1001001011_{1,2}$= 12,07376	$110000111_{1,2}$= 11,52300	$11101001_{1,2}$= 11,78548
$1001001010_{1,2}$= 11,07376	$101110001_{1,2}$= 12,84772	$11100111_{1,2}$= 12,69748
$1001000111_{1,2}$= 11,78576	$101110000_{1,2}$= 11,84772	$11100110_{1,2}$= 11,69748

Basis 1,2 – Fortsetzung:

$11100101_{1,2} = 11{,}49748$	$11010111_{1,2} = 12{,}28276$	$10110111_{1,2} = 11{,}78510$
$11100011_{1,2} = 11{,}25748$	$11010110_{1,2} = 11{,}28276$	$10101111_{1,2} = 11{,}43950$
$11011101_{1,2} = 12{,}81076$	$11010101_{1,2} = 11{,}08276$	$10011111_{1,2} = 11{,}02478$
$11011100_{1,2} = 11{,}81076$	$11001111_{1,2} = 11{,}93716$	$1111111_{1,2} = 12{,}91590$
$11011011_{1,2} = 12{,}57076$	$10111110_{1,2} = 12{,}51310$	$1111110_{1,2} = 11{,}91590$
$11011010_{1,2} = 11{,}57076$	$10111101_{1,2} = 12{,}31310$	$1111101_{1,2} = 11{,}71590$
$11011001_{1,2} = 11{,}37076$	$10111100_{1,2} = 11{,}31310$	$1110111_{1,2} = 11{,}18790$

Es gibt unter den oben angegebenen Voraussetzungen 273 Möglichkeiten, die Dezimalzahl 12 mit einem System mit der Basis 1,2 darzustellen. Ich habe es unterlassen, eine noch kleinere Basiszahl als 1,2 zu verwenden (z. B. 1,1 oder gar 1,01), denn die Anzahl der Möglichkeiten steigt offensichtlich gewaltig an, je mehr sich die Basiszahl dem kleinstmöglichen Wert 1 nähert. Und dabei habe ich jeweils nur die Stellen links vom Komma berücksichtigt! Das war eine bewusste, vorläufige Einschränkung. Was passiert, wenn ich auch die Stellen rechts vom Komma berücksichtige? In allen Zahlensystemen steigt damit natürlich die Genauigkeit. Ich kann damit eine *beliebige* Genauigkeit erreichen. Allerdings gibt es noch einen anderen Effekt, der wichtig ist.

Um diesen Effekt zu zeigen, verwende ich als Beispiel die Umrechnung der Dezimalzahl 12 in das System mit der Basis 1,4. Zunächst erweitere ich meine Potenzen-Tabelle »nach unten« in den Bereich der negativen Potenzen:

$1{,}4^{8} = 14{,}75789$	$1{,}4^{-3} = 0{,}3644315$	$1{,}4^{-14} = 0{,}0089993$
$1{,}4^{7} = 10{,}54135$	$1{,}4^{-4} = 0{,}2603082$	$1{,}4^{-15} = 0{,}0064305$
$1{,}4^{6} = 7{,}52954$	$1{,}4^{-5} = 0{,}1859344$	$1{,}4^{-16} = 0{,}0045915$
$1{,}4^{5} = 5{,}37824$	$1{,}4^{-6} = 0{,}1328103$	$1{,}4^{-17} = 0{,}0032796$
$1{,}4^{4} = 3{,}8416$	$1{,}4^{-7} = 0{,}0948645$	$1{,}4^{-18} = 0{,}0023426$
$1{,}4^{3} = 2{,}744$	$1{,}4^{-8} = 0{,}0677604$	$1{,}4^{-19} = 0{,}0016733$
$1{,}4^{2} = 1{,}96$	$1{,}4^{-9} = 0{,}0484003$	$1{,}4^{-20} = 0{,}0019520$
$1{,}4^{1} = 1{,}4$	$1{,}4^{-10} = 0{,}0345716$	$1{,}4^{-21} = 0{,}0008537$
$1{,}4^{0} = 1$	$1{,}4^{-11} = 0{,}0246940$	$1{,}4^{-22} = 0{,}0006098$
$1{,}4^{-1} = 0{,}7142857$	$1{,}4^{-12} = 0{,}0176386$	$1{,}4^{-23} = 0{,}0004356$
$1{,}4^{-2} = 0{,}5102041$	$1{,}4^{-13} = 0{,}0125990$	$1{,}4^{-24} = 0{,}0003111$

$1{,}4^{-25} = 0{,}0002222$ $1{,}4^{-31} = 0{,}0000295$ $1{,}4^{-37} = 0{,}0000039$
$1{,}4^{-26} = 0{,}0001587$ $1{,}4^{-32} = 0{,}0000211$ $1{,}4^{-38} = 0{,}0000028$
$1{,}4^{-27} = 0{,}0001134$ $1{,}4^{-33} = 0{,}0000151$ $1{,}4^{-39} = 0{,}0000020$
$1{,}4^{-28} = 0{,}0000810$ $1{,}4^{-34} = 0{,}0000108$ $1{,}4^{-40} = 0{,}0000014$
$1{,}4^{-29} = 0{,}0000578$ $1{,}4^{-35} = 0{,}0000077$ $1{,}4^{-41} = 0{,}0000010$
$1{,}4^{-30} = 0{,}0000413$ $1{,}4^{-36} = 0{,}0000055$ $1{,}4^{-42} = 0{,}0000007$
$\vdots$

Das erste Ergebnis bei unserem »ersten Durchgang« der Umrechnung ins System mit der Basis 1,4, dessen Wert knapp unterhalb von 12 war, lautete

$$10000010_{1,4} = 11{,}94135$$

Um die Zahl 12 exakt zu erreichen, fehlt also noch die Differenz 12 – 11,94135 = 0,05865. Ich füge daher an der 9. Stelle rechts vom Komma eine 1 hinzu und die Differenz beträgt nur noch 0,05856 – 0,0484003 = 0,0101597. Unser wesentlich genaueres Ergebnis heißt nun

$$10000010{,}000000001_{1,4} = 11{,}9898403$$

Eine weitere 1 an der 14. Stelle rechts vom Komma verbessert es weiter.

$$10000010{,}00000000100001_{1,4} = 11{,}9988396$$

An der 21. Stelle rechts vom Komma eine weitere 1 drangehängt ergibt

$$10000010{,}000000001000010000001_{1,4} = 11{,}9996933$$

und dann hängen wir auch noch an der 25.

$$10000010{,}0000000010000100000010001_{1,4} = 11{,}9999155$$

und an der 28. Stelle eine weitere 1 dran:

$$10000010{,}0000000010000100000010001001_{1,4} = 11{,}9999965$$

Ich bin dabei so vorgegangen, dass ich nach dem Komma jeweils den *ersten* Potenzwert genommen habe, der etwas kleiner als die noch vorhandene Differenz zur gesuchten Zahl 12 war. Ich hätte aber auch statt des Wertes mit der Potenz −9 erst den Wert mit der Potenz −10 nehmen können, da danach noch genügend Potenzwerte kommen, deren Summe locker ausreicht, um die Differenz zu 12 aufzufüllen. Selbst wenn ich erst mit der Potenz −12 weitergemacht hätte, wäre das kein Malheur gewesen. Denn

$$1{,}4^{-12} + 1{,}4^{-13} + 1{,}4^{-14} + 1{,}4^{-15} + 1{,}4^{-16} = 0{,}0502564$$

ist bereits größer als $1{,}4^{-9} = 0{,}0484003$. Die Potenzwerte wachsen *schneller als nötig*. Die Konsequenz daraus ist, dass es *unendlich viele Möglichkeiten* gibt, wie eine bestimmte Zahl geschrieben werden kann. Solange ich mich auf die positiven Potenzwerte beschränke, gibt es nur eine begrenzte Anzahl von Möglichkeiten. Verwende ich jedoch auch die negativen Potenzwerte mit beliebig vielen Stellen nach dem Komma, dann steigt die Anzahl der Möglichkeiten ins Unendliche.

– – –

Im Folgenden werde ich die Anzahl der Möglichkeiten untersuchen, die Dezimalzahl 12 in einem »Φ-System« darzustellen. Wir haben vorhin u. a. bereits die Möglichkeiten mit den Basiszahlen 1,6 und 1,7 untersucht – für 1,7 haben wir 2 Möglichkeiten und für 1,6 haben wir 4 Möglichkeiten gefunden. Als Einschränkung für die Genauigkeit des Ergebnisses bei der Berechnung haben wir eine Abweichung von kleiner als 1 festgelegt. Mit sinkender Größe der Basiszahl stieg die Anzahl der Möglichkeiten.

Da Φ = 1,618… etwas größer als 1,6 ist, erwarte ich ein Ergebnis zwischen 2 und 4 Möglichkeiten.

Als Erstes lege ich die Potenzentabelle für die Basis Φ an:

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
\Phi^6 &= 17{,}94427191 \\
\Phi^5 &= 11{,}09016994 \\
\Phi^4 &= 6{,}85410197 \\
\Phi^3 &= 4{,}23606798 \\
\Phi^2 &= 2{,}61803399 \\
\Phi^1 &= 1{,}61803399 \\
\Phi^0 &= 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Der erste Wert ist schnell gefunden. Er ist

$$100000_\Phi = \Phi^5 = 11{,}09017$$

Die Abweichung zur gesuchten Zahl 12 ist bereits kleiner als 1. Der nächste gefundene Wert ist

$$11000_\Phi = \Phi^4 + \Phi^3 = 6{,}85410 + 4{,}23607 = 11{,}09017$$

Schließlich gibt es noch eine weitere Möglichkeit:

$$10110_\Phi = \Phi^4 + \Phi^2 + \Phi^1 = 6{,}85410 + 2{,}618034 + 1{,}618034 = 11{,}09017$$

Wir erhalten als Ergebnis somit 3 Möglichkeiten. Schreiben wir diese 3 Möglichkeiten nochmal schön untereinander auf:

$$\begin{aligned}
100000_\Phi &= \Phi^5 &&= 11{,}09017 \\
11000_\Phi &= \Phi^4 + \Phi^3 &&= 11{,}09017 \\
10110_\Phi &= \Phi^4 + \Phi^2 + \Phi^1 &&= 11{,}09017
\end{aligned}$$

3-mal das exakt gleiche Ergebnis!!

War das Zufall oder tritt ein solches Ergebnis auch bei anderen Zahlen auf? Das möchte ich jetzt gleich wissen. Ich untersuche daher auch noch die Anzahl der Möglichkeiten für eine andere Zahl – und nehme dafür die Zahl 16,5.

Hier die 3 Ergebnisse:

$$
\begin{aligned}
101001_\Phi &= \Phi^5+\Phi^3+\Phi^0 &&= 16{,}32624\\
100111_\Phi &= \Phi^5+\Phi^2+\Phi^1+\Phi^0 &&= 16{,}32624\\
11111_\Phi &= \Phi^4+\Phi^3+\Phi^2+\Phi^1+\Phi^0 &&= 16{,}32624
\end{aligned}
$$

Wenn man genau hinschaut, dann kann man sehen, dass es einen einfachen Grund gibt, warum die Ergebnisse immer identisch sein *müssen*:

$$\boxed{\Phi^0+\Phi^1=\Phi^2}$$

Darin ist die gesamte »Entstehungsgeschichte« der Zahl Φ enthalten:

Nimm etwas und gib etwas Anderes dazu. Das Ergebnis ist etwas Neues.
Das machst du mit dem Anderen und dem Neuen wieder. Beliebig oft.

Eine Potenz von Φ ist immer die Summe der beiden vorhergehenden Potenzen! Also ist z. B.

$$\Phi^3+\Phi^4=\Phi^5$$

und das ist der Grund, warum

$$
\begin{aligned}
101001_\Phi &= \Phi^5+\Phi^3+\Phi^0 &&= 16{,}32624\\
100111_\Phi &= \Phi^5+\Phi^2+\Phi^1+\Phi^0 &&= 16{,}32624
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
100111_\Phi &= \Phi^5+\Phi^2+\Phi^1+\Phi^0 &&= 16{,}32624\\
11111_\Phi &= \Phi^4+\Phi^3+\Phi^2+\Phi^1+\Phi^0 &&= 16{,}32624
\end{aligned}
$$

zu identischen Ergebnissen führen müssen.

~~~ ~~~

Mein Freund ist seit gestern wieder zurück von seinem Urlaub und ich nütze daher die Gelegenheit, ihn ein wenig zum Rechnen und Zeichnen einzuspannen.

|» Was hältst du davon?
~~~

«| Nur zu, ich bin gut ausgeruht! Wobei soll ich dir denn helfen?

|» Um dir das zu beschreiben, muss ich erst ein wenig ausholen. Wir haben bei der Beschäftigung mit unseren »Zahlensystemen« mit einem Basiswert kleiner als 2 und größer als 1 festgestellt, dass wir damit genausogut jede beliebige Zahl darstellen können wie mit Zahlensystemen, deren Basis eine natürliche Zahl größer oder gleich 2 ist. Allerdings liefern die Zahlen in diesen Systemen immer viele bzw. sogar *unendlich viele* Möglichkeiten, eine Zahl darzustellen. Wenn wir uns darauf einigen, dass wir die Umrechnung in unser System mit der kleinen Basis immer auf eine ganz bestimmte Weise vornehmen, dann haben wir zumindest eine Art »Standard«, von dem aus wir Vergleiche ziehen können.

Ich möchte nämlich wissen, ob es irgendein *Muster* gibt, nach welchem sich *natürliche Zahlen* (also *ganze* Zahlen) bilden. Für unser »Standard-Verfahren« schlage ich vor, dass wir – so wie ich es bereits vorhin gemacht habe – jeweils die *erste* Möglichkeit hernehmen, um eine Zahl zu bilden. So wie ich es (ab Seite 121) bei der Umrechnung der Zahl 13,6 in ein System mit der Basis 1,4 gemacht habe.

Da die Ergebnisse für die Umrechnung immer in einer »dualen« Form vorliegen (nur die Ziffern 0 und 1 müssen verwendet werden), kannst du sie auch als eine Art »Plot« darstellen, also so, dass du einen schwarzen Punkt für eine 1 ausgibst und für eine 0 das Papier einfach weiß lässt.

«| Das klingt nicht weiter schwierig.

|» Das dachte ich mir. Allerdings hat die Sache einen klitzekleinen Haken – ohne diesen hätte ich während deines Urlaubs das Problem längst selber gelöst. Ich möchte nämlich, dass du eine Software[1] verwendest, welche die Berechnungen auf mindestens 100 Dezimalstellen genau durchführt. Möglicherweise brauchen wir sogar eine noch höhere Genauigkeit.

«| 100 Dezimalstellen? Das geht nicht, mein Excel[2] rechnet nur mit einer Ge-

1 Ein Computer-Programm

2 Ein Tabellenberechnungsprogramm von Microsoft

nauigkeit von 15 Stellen. Ich besitze zwar auch einen ultragenauen Taschenrechner, aber selbst dessen Genauigkeit ist auf 32 Stellen begrenzt.

|» Du bist doch Programmierer ...

«| Ja. Aber was du da verlangst, ist alles andere als einfach. Schließlich ...

|» (*Lacht*) Wenn's einfach wäre, hätte ich es längst selber erledigt!

«| Bis wann brauchst du es?

|» Bis gestern.

«| Na klar ... reicht ein silbernes Tablett oder soll ich es dir auf einem goldenen servieren?

|» Mir reicht ein gewöhnliches Holzbrett.

«| (*Seufzt*) Also gut. Ich erfülle dir deinen Wunsch. Irgendwie werde ich das schon hinbekommen.

|» Juhuuu!

~~~ ~~~ Einige Tage später ~~~ ~~~

«| Ich hab's!

|» Was?

«| Das Programm! Mein Excel kann jetzt auf *beliebig viele* Stellen genau rechnen! Allerdings ist die Rechengeschwindigkeit nicht gerade berauschend.

|» Das stört mich nicht. Solange wir die Rechenzeit nicht in Wochen ausdrücken müssen ...

«| Nein, so schlimm ist es nicht. Aber für größere Diagramme kann es schon sein, dass sich mein Computer ein paar Stunden lang ins Zeug legen muss.

|» Dann verhelfen wir ihm gleich zu ein paar vergnüglichen Rechenstunden. Ich würde gerne einen Probegalopp mit der Basiszahl 1,5 machen.

~~~ ~~~ Etwas später ~~~ ~~~

«| Schau her. Ich habe die Punkte, die eine 1 darstellen, in Form von schwarzen Quadraten dargestellt:

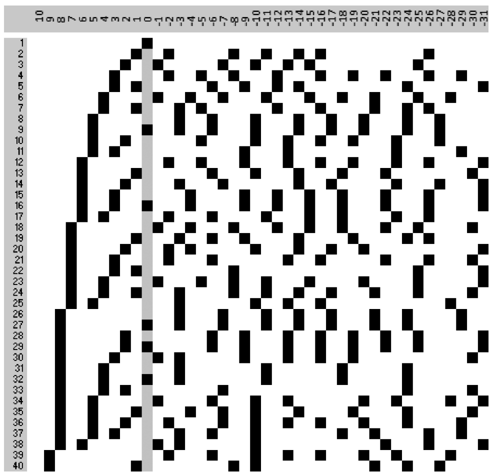


Bild 17: Basis = 1,5

Oberhalb davon habe ich die Potenzen aufgetragen, links siehst du die natürlichen Zahlen, die ich berechnet habe. In dem Muster habe ich die ganzen Zahlen von 1 bis 40 im »Dualsystem« mit der Basis 1,5 dargestellt. Picken wir uns die Dezimalzahl 19 etwas vergrößert heraus:

Bild 18

|» Genau so habe ich mir das vorgestellt! Allerdings ist die Genauigkeit noch nicht so hoch wie von mir gewünscht.

«| Das ist kein Problem, ich wollte dir erst mal nur das Prinzip zeigen, wie meine Lösung aussieht. Später kann ich die Tabelle in alle Richtungen beliebig erweitern.

Die natürliche Zahl 19 sieht im 1,5er-System also wie folgt aus:

$$10000010{,}00100100100001000010000010100000_{1,5} =$$
$$1{,}5^{7} + 1{,}5^{1} + 1{,}5^{-3} + 1{,}5^{-6} + 1{,}5^{-9} + 1{,}5^{-14} + 1{,}5^{-19} + 1{,}5^{-24} + 1{,}5^{-26} =$$
$$18{,}99999997136022060993004 05\ldots$$

|» Das ist bereits ziemlich genau! Und ich habe es sicherheitshalber mit deinem supergenauen Taschenrechner nachgerechnet – er kommt zum gleichen Ergebnis! Diese noch wesentlich höhere Genauigkeit brauche ich aber nicht für die Zahl selbst (diese ist gar nicht so interessant), sondern für das *Muster*, das eventuell erkennbar wird, wenn ich die Veränderung über eine Vielzahl von Zahlen vergleichen kann. Ganz speziell interessieren mich fürs Erste die »Randbereiche« knapp unterhalb der Basis 2 und knapp oberhalb der Basis 1.

«| Dann schlage ich vor, wir beginnen mit der Basis 1,01:

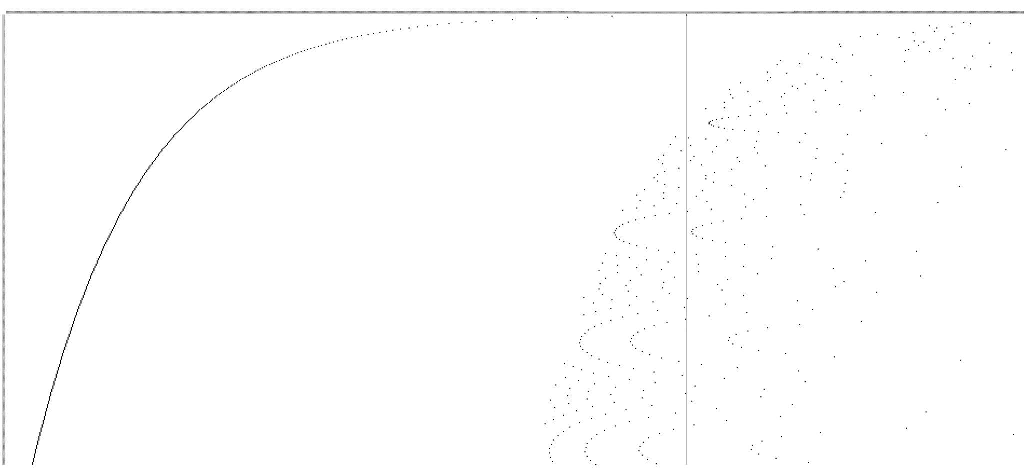


BILD 19: Basis = 1,01

|» Die einzelnen Punkte sind jetzt aber sehr klein!

«| Weil es so viele sind! Die Tabelle enthält »nach unten« die natürlichen Zahlen von 1 bis 420. Von der grauen Null-Linie nach links sind die positiven Potenzen bis 630 aufgetragen, rechts davon die negativen Potenzen bis –312. Erhöht man die Basis geringfügig, dann krümmt sich die »äußere Kurve« stärker nach unten. In späterer Folge werden dann auch immer mehr »innere Kurven« sichtbar, die sich ebenfalls zunehmend stärker krümmen.

Das Ergebnis im gleichen Maßstab für weitere Basiswerte von 1,02 bis 1,10:

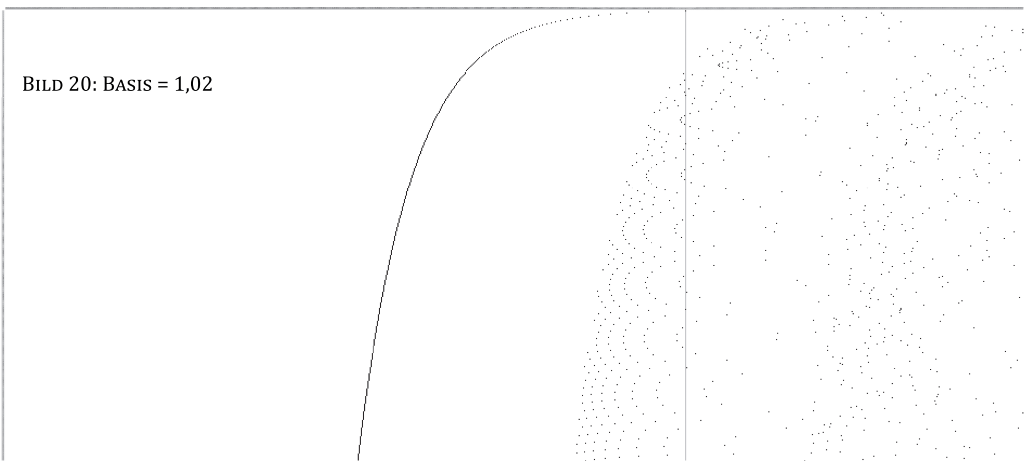


Bild 20: Basis = 1,02

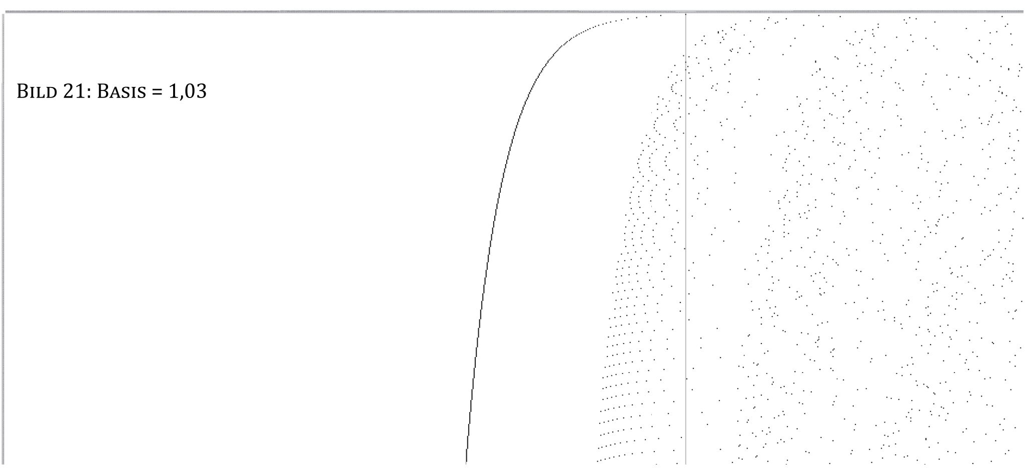


Bild 21: Basis = 1,03

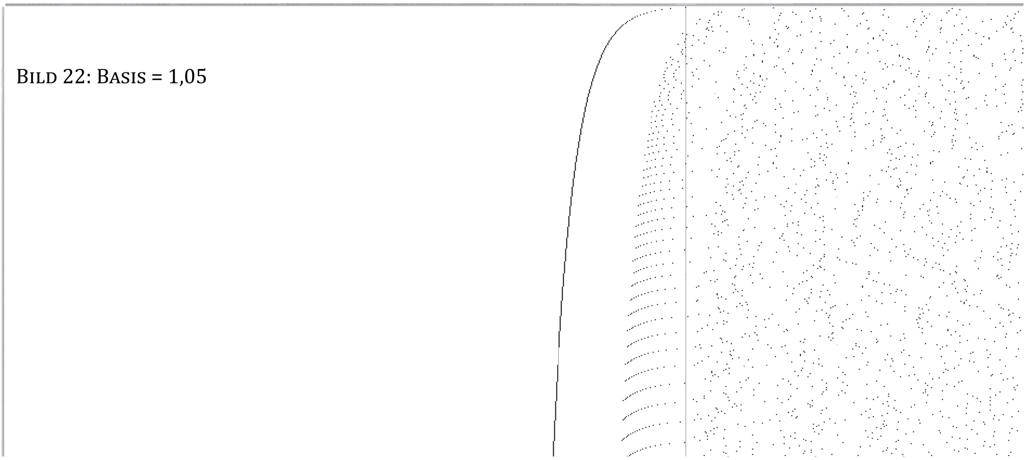


BILD 22: BASIS = 1,05

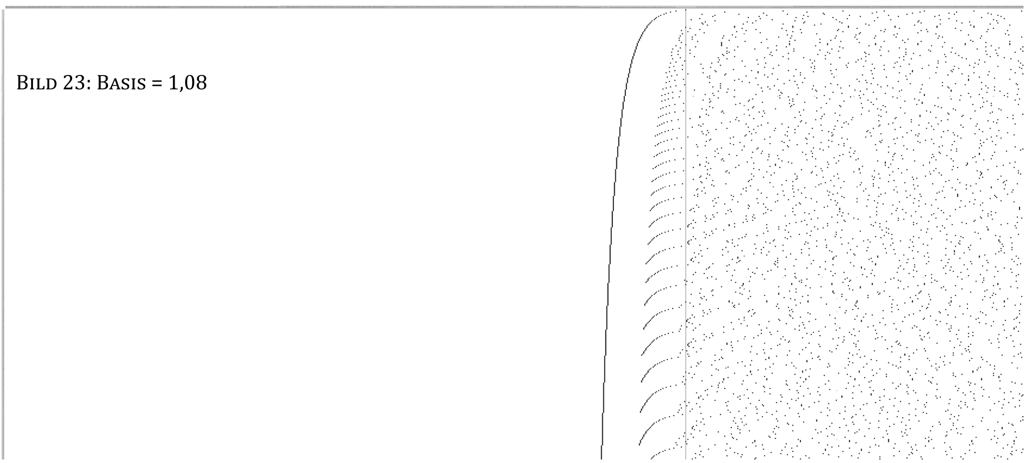


BILD 23: BASIS = 1,08

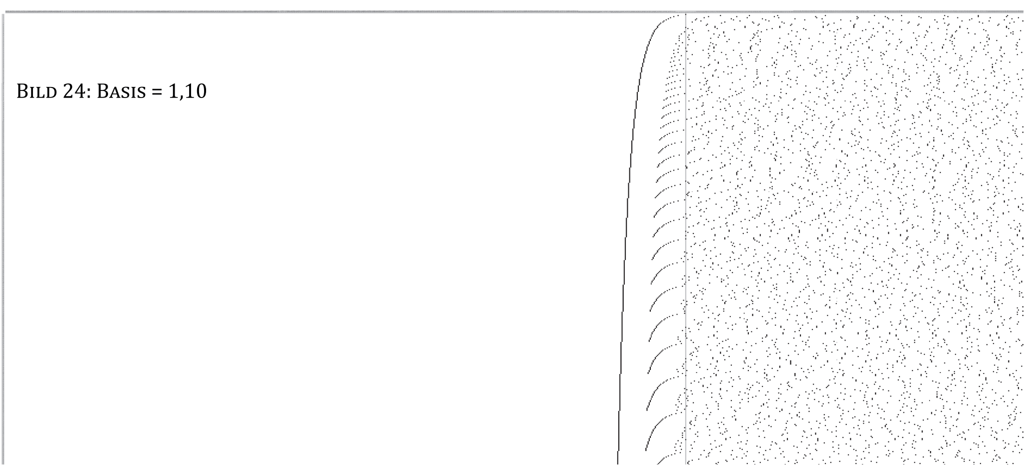


BILD 24: BASIS = 1,10

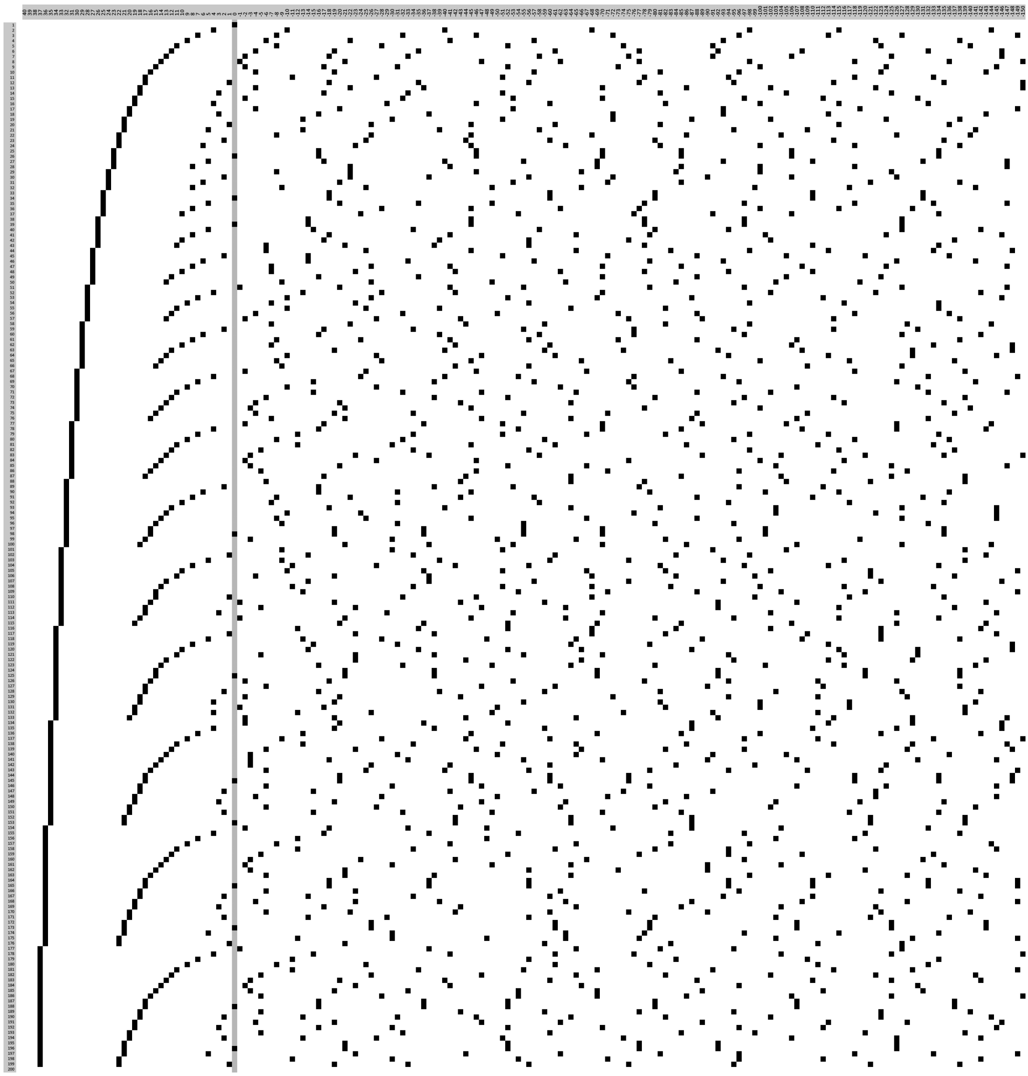


Bild 25: Basis = 1,15

Ab hier vergrößern wir die Darstellung und wählen den Ausschnitt so, dass in horizontaler Richtung die Potenzen von +40 bis –150 und in vertikaler Richtung (nach unten) die natürlichen Zahlen von 1 bis 200 aufgetragen werden. In der weiteren Folge erhöhen wir die Basis-Werte stufenweise um jeweils 0,05.

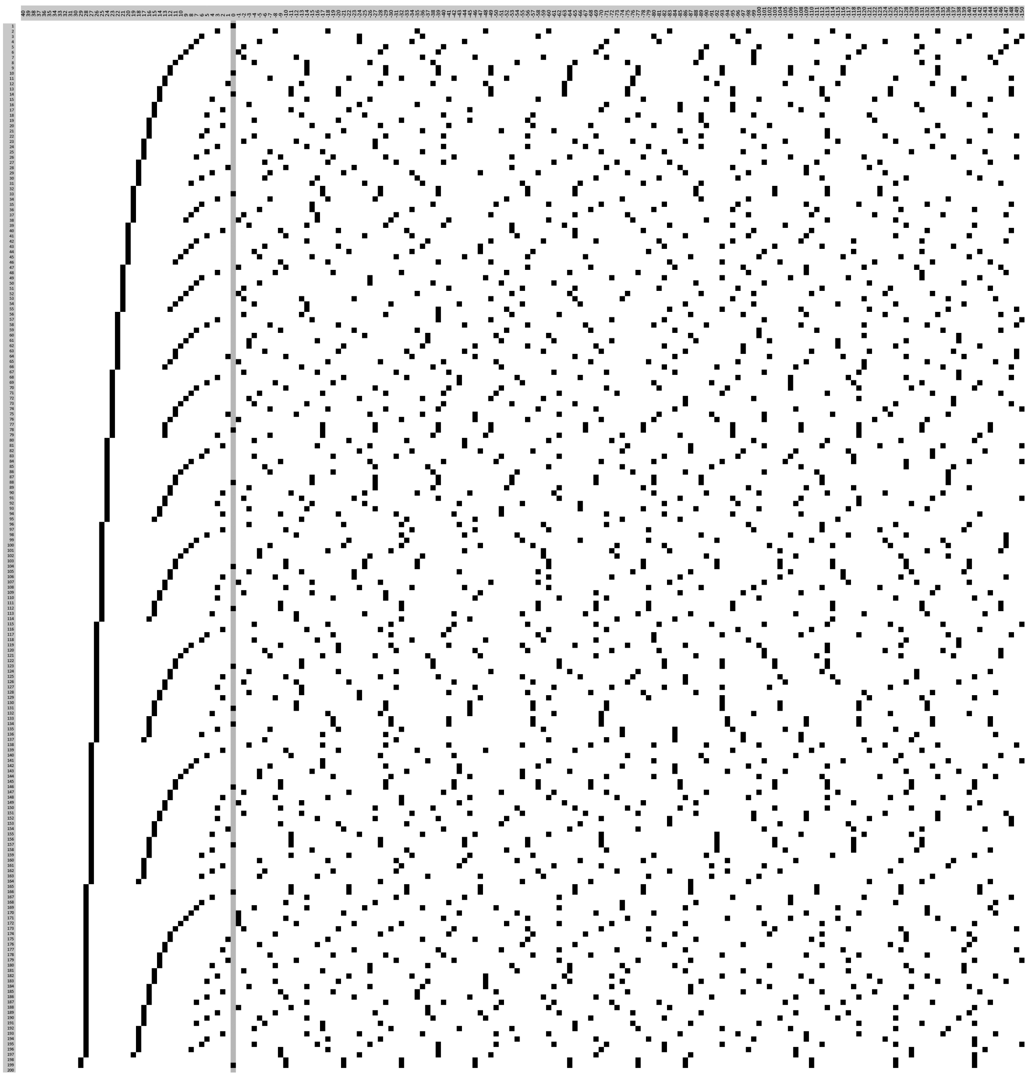


BILD 26: BASIS = 1,20

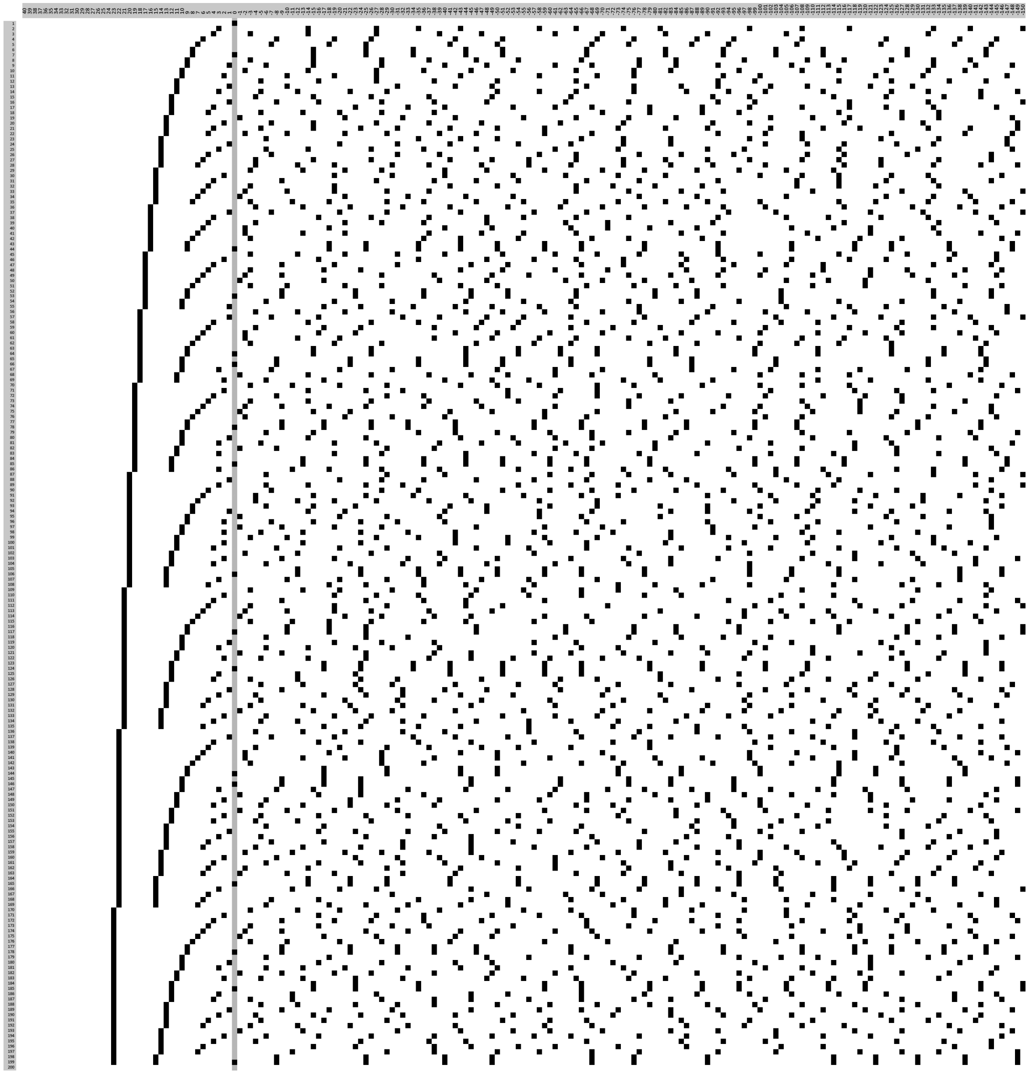


BILD 27: BASIS = 1,25

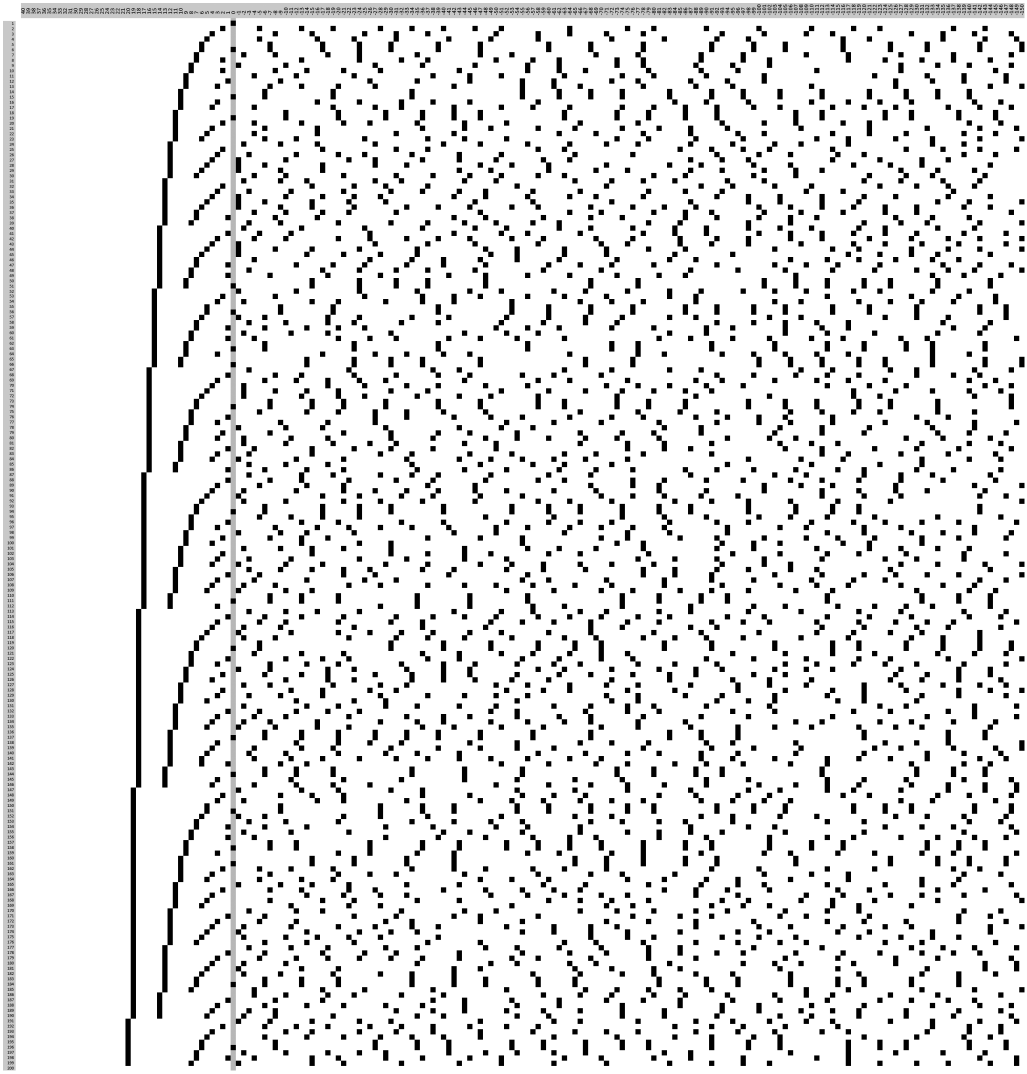


BILD 28: BASIS = 1,3

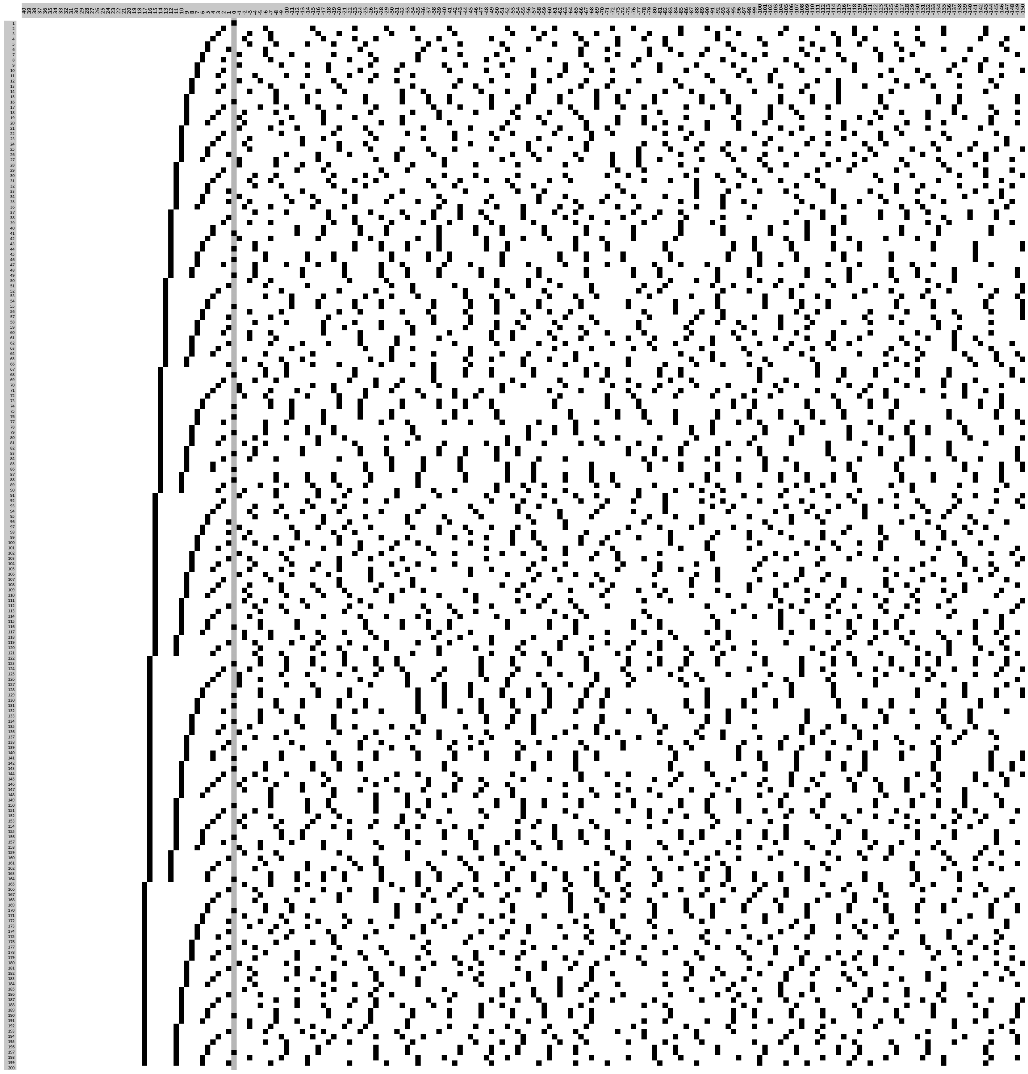


BILD 29: BASIS = 1,35

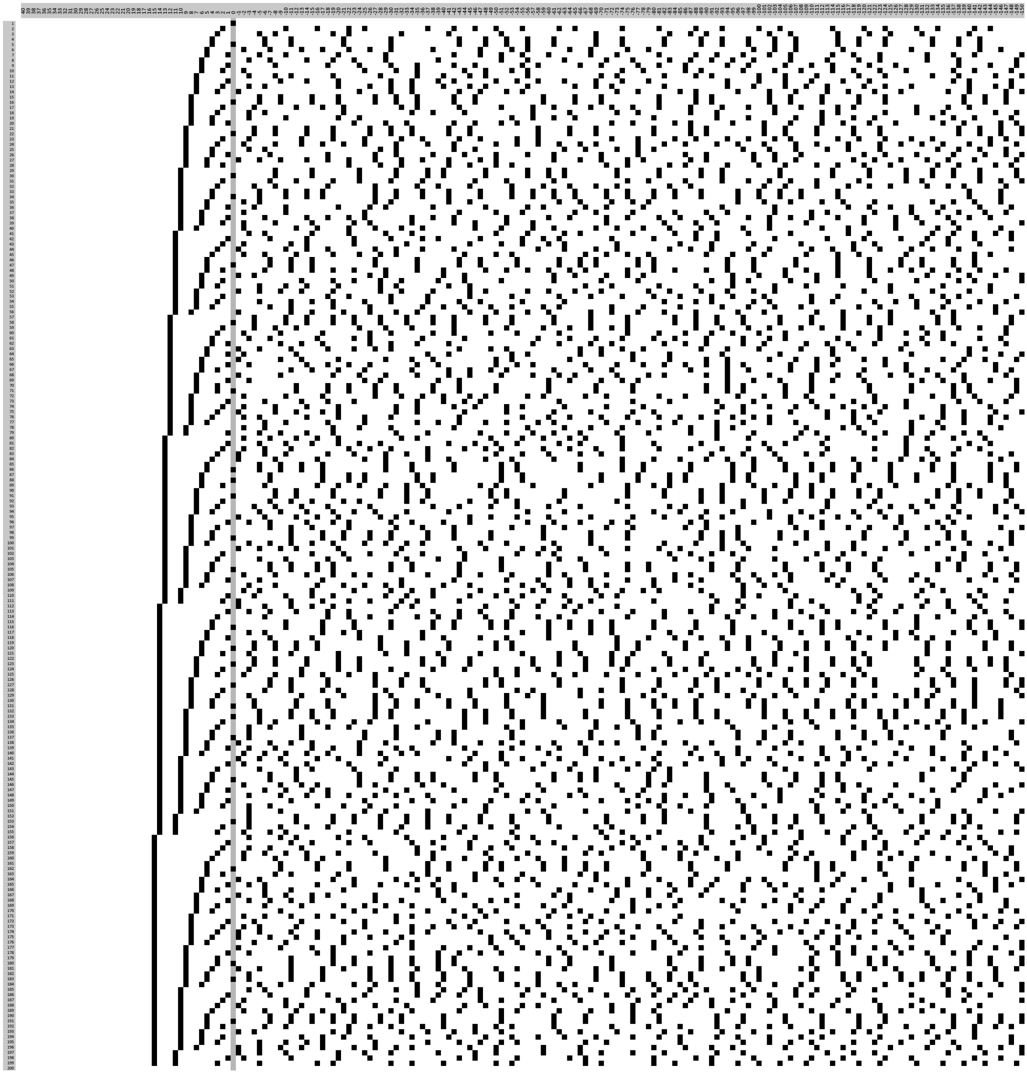


BILD 30: BASIS 1,4

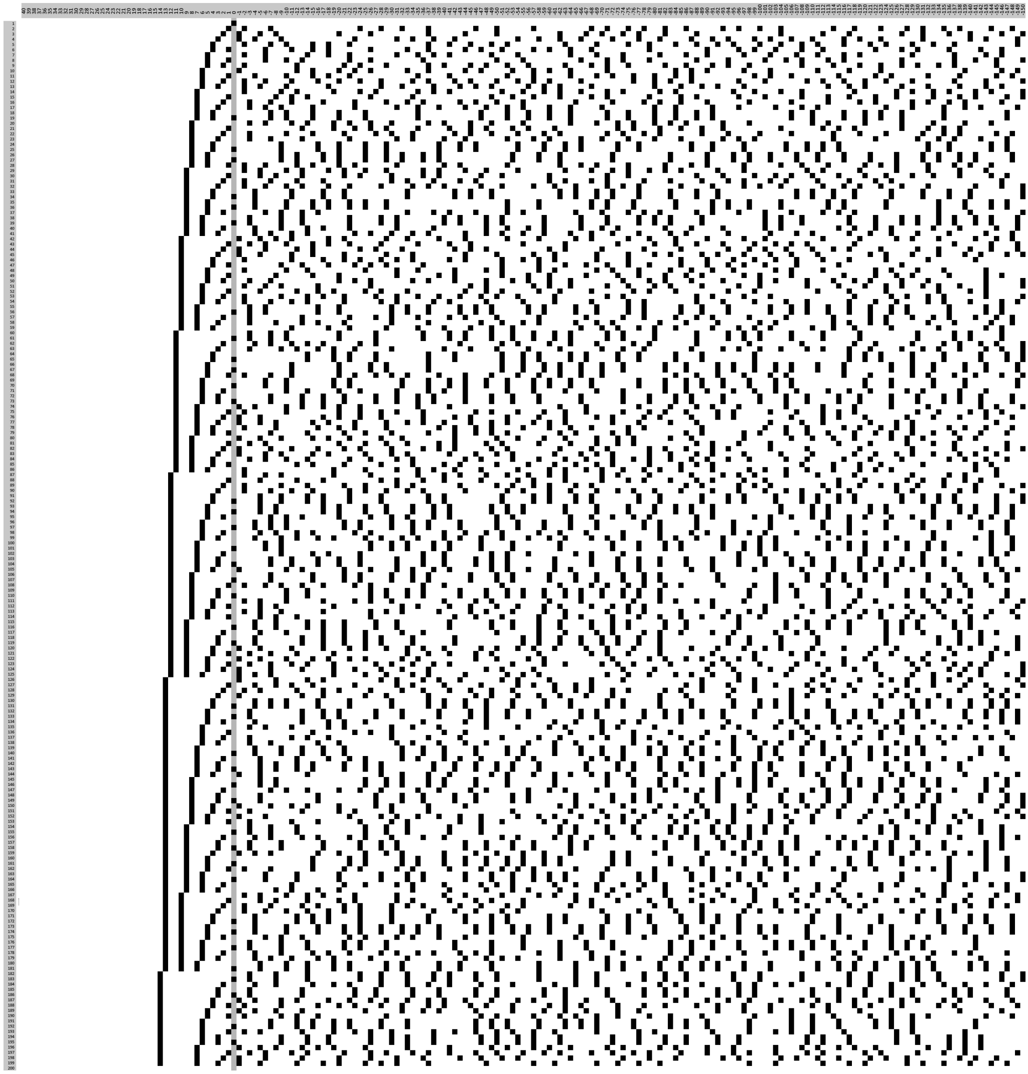


BILD 31: BASIS = 1,45

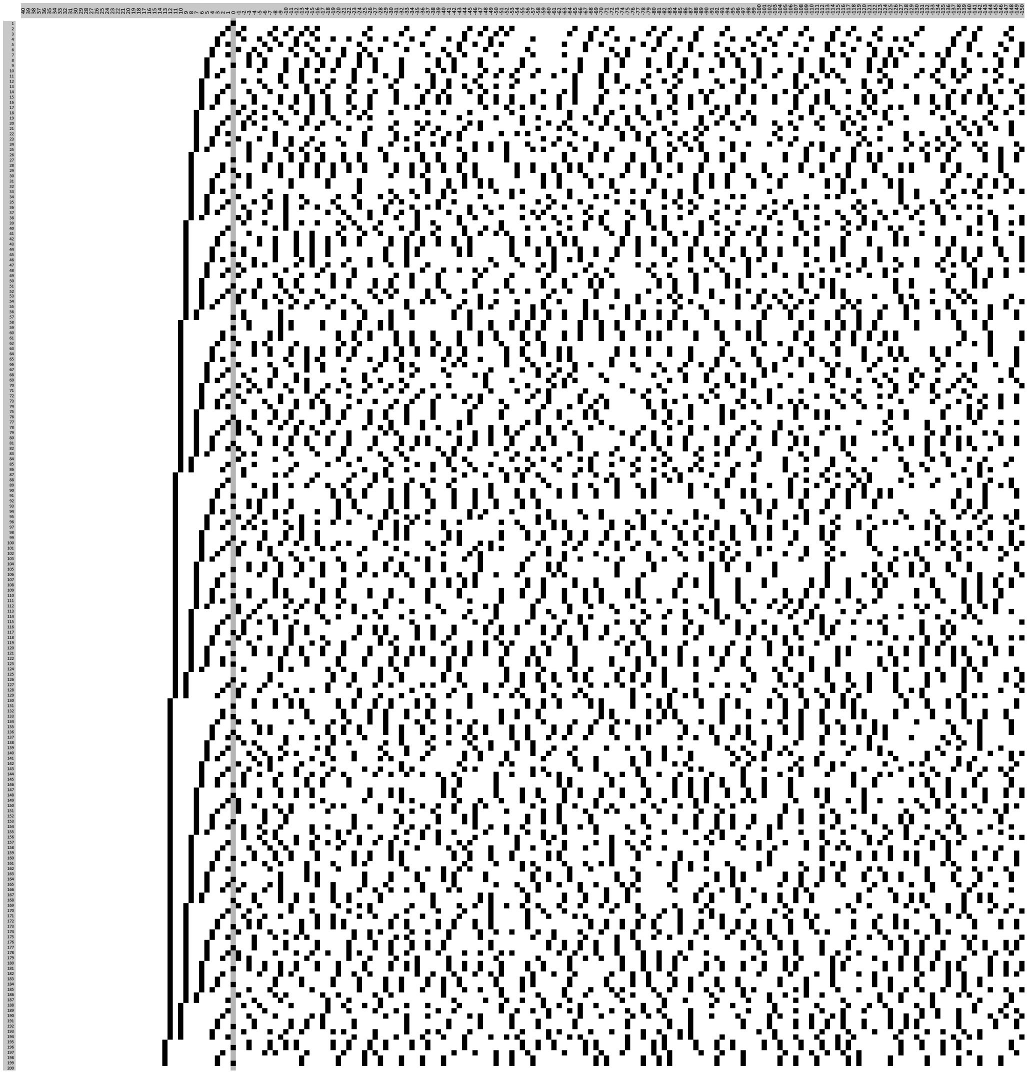


BILD 32: BASIS = 1,5

Mit der Basiszahl 1,5 befinden wir uns genau in der (linearen) Mitte zwischen 1 und 2. Das Muster zeigt keinerlei Auffälligkeiten ...

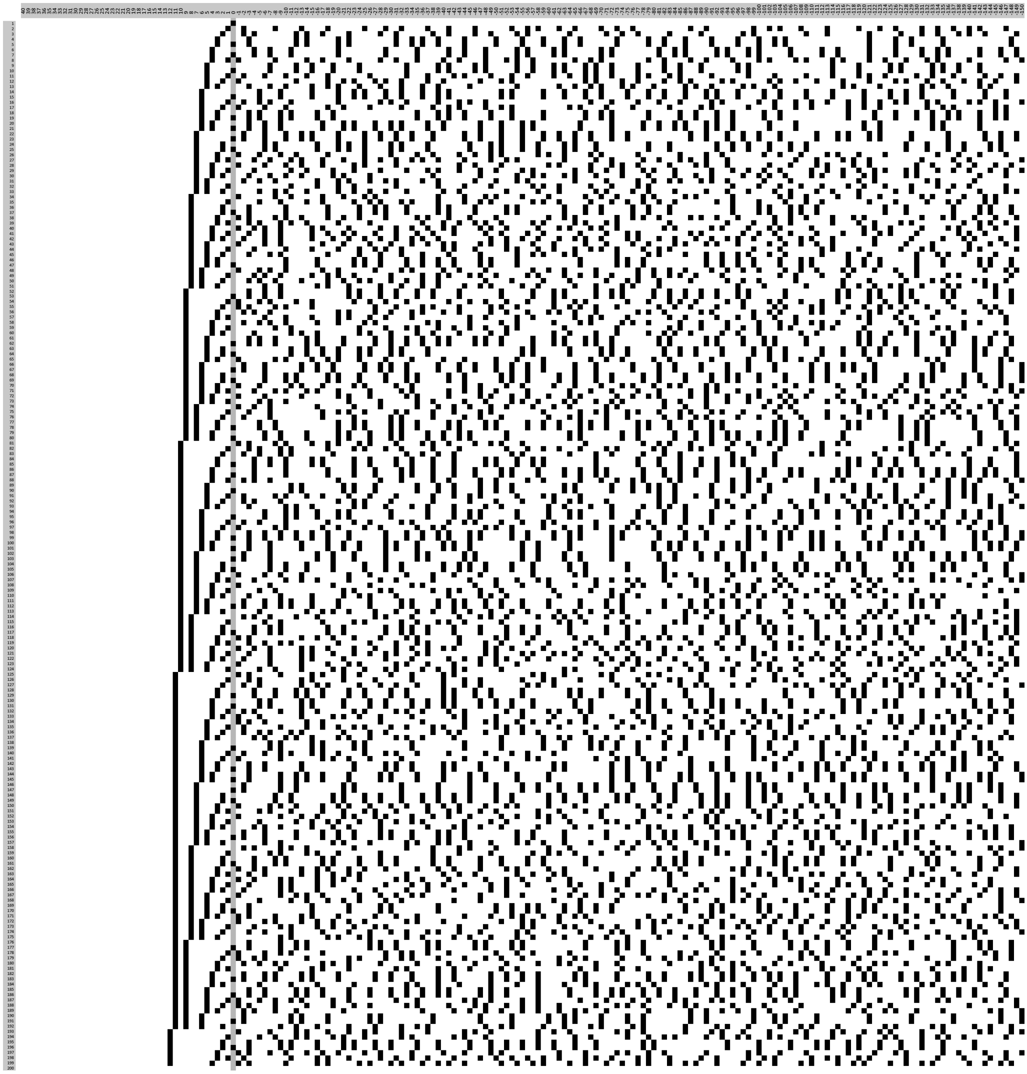


BILD 33: BASIS = 1,55

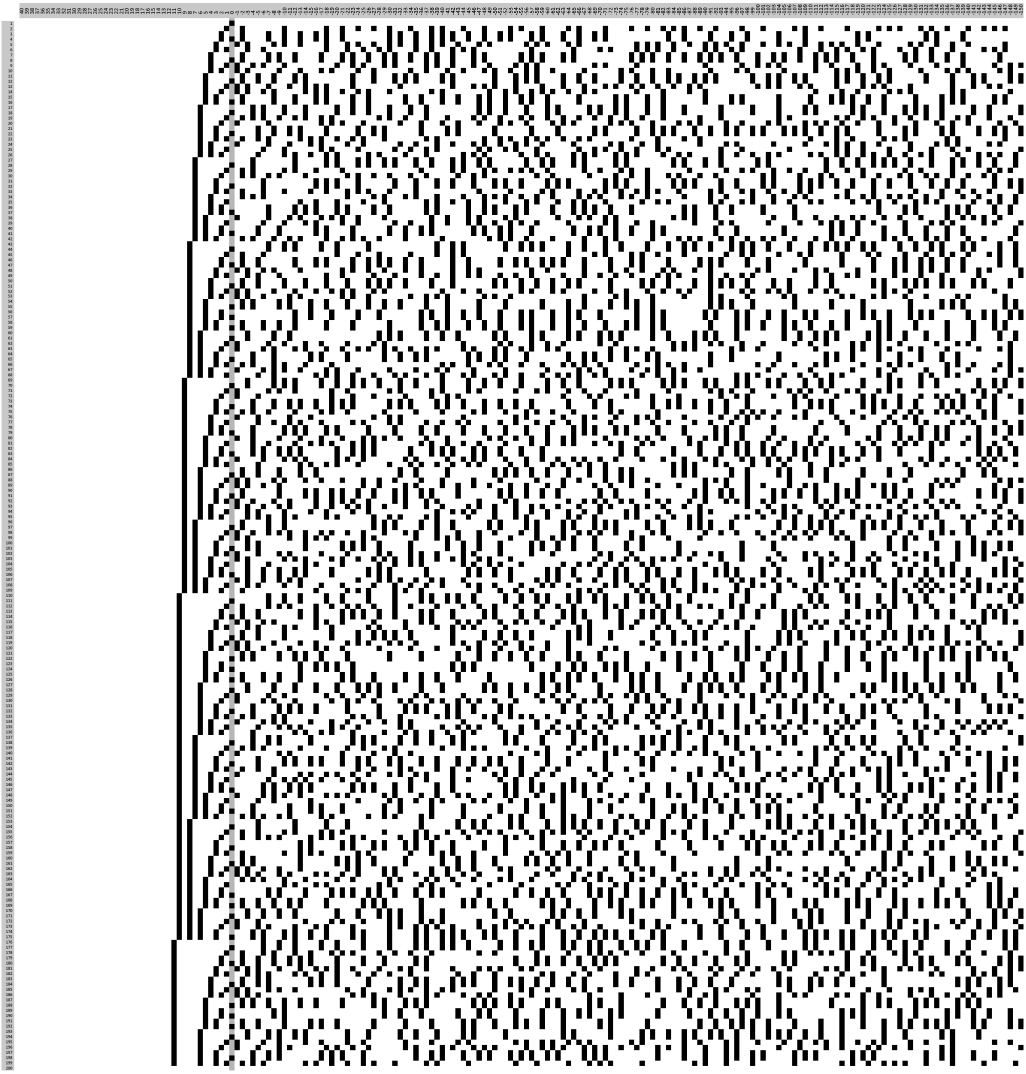


BILD 34: BASIS = 1,6

Die Punkte werden immer dichter, aber der Mindestabstand von 1 zwischen zwei Potenzwerten wird immer noch durchgehend eingehalten – auf beiden Seiten der Nulllinie.

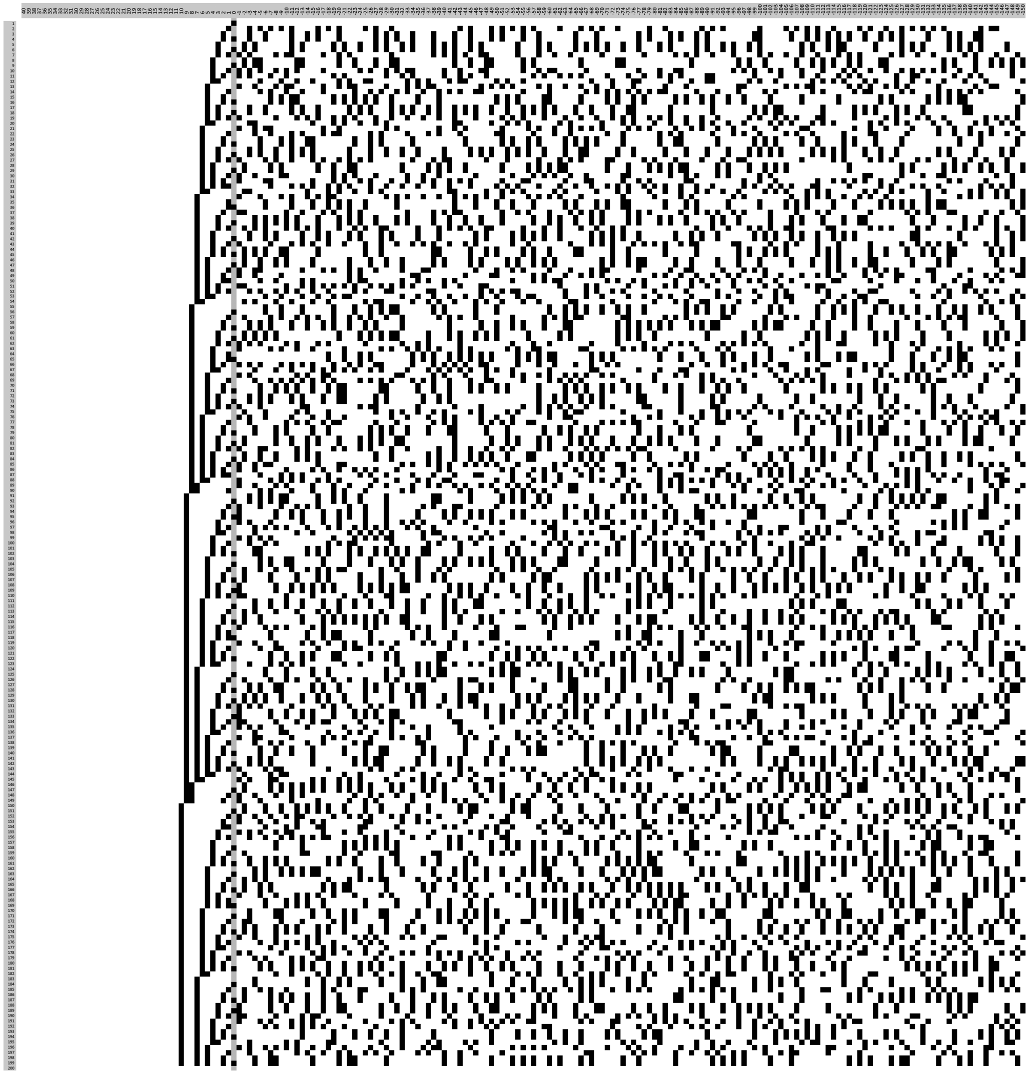


BILD 35: BASIS = 1,65

Zum ersten Mal werden die Punkte so dicht, dass es einige Punkte gibt, zwischen denen kein horizontaler Abstand mehr vorhanden ist. An den »unteren Enden« der einzelnen vertikalen Teillinien »stauen sich die Punkte« und werden in die bisher weiß gebliebenen Zwischenräumen zurückgedrückt.

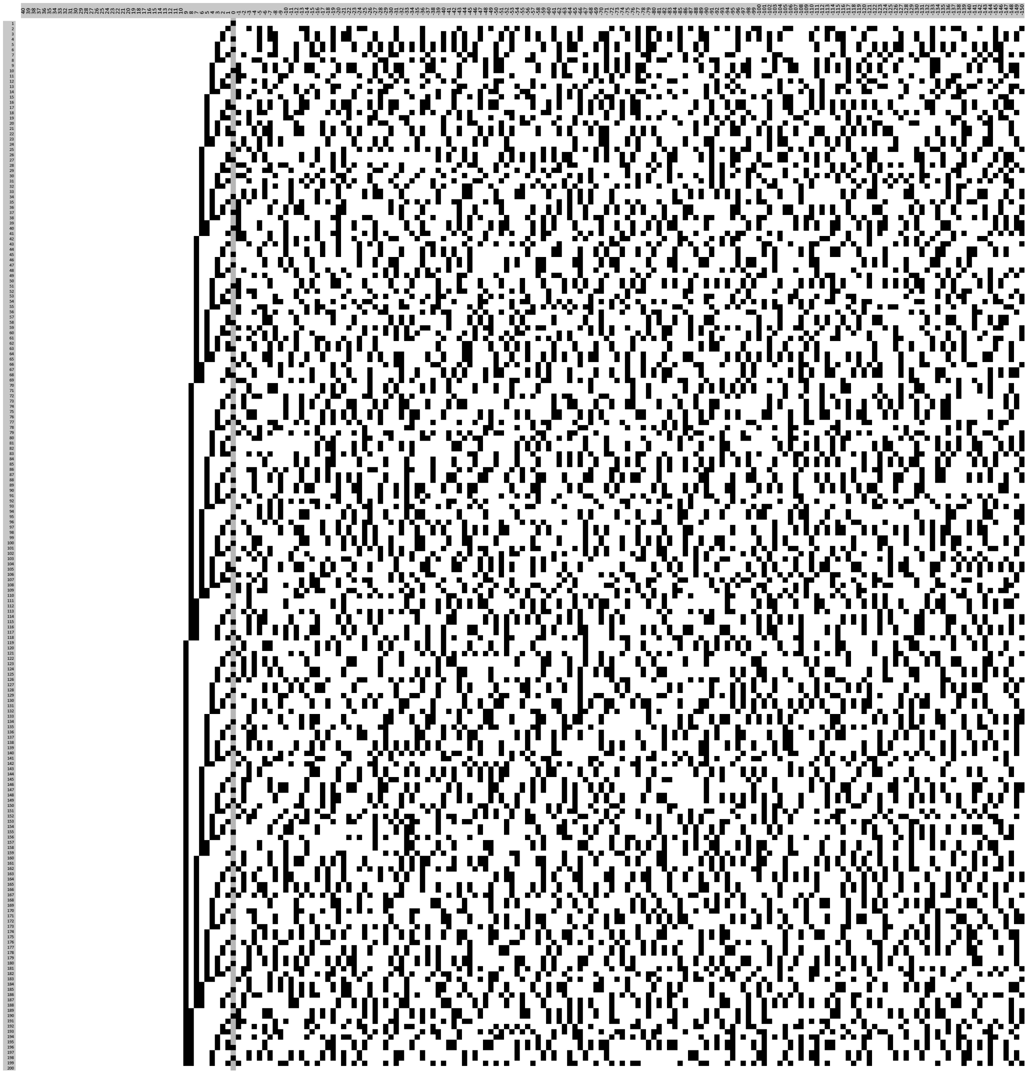


Bild 36: Basis = 1,7

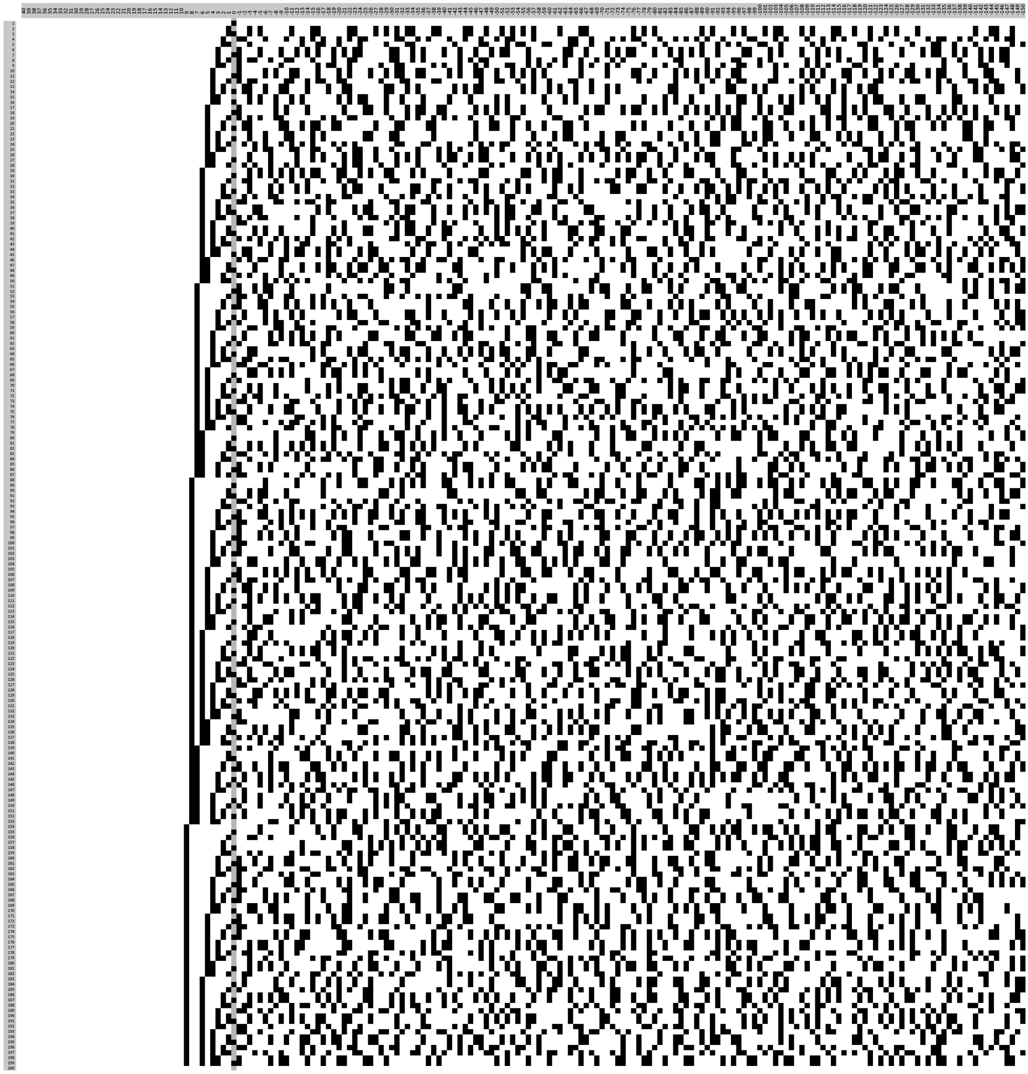


BILD 37: BASIS = 1,75

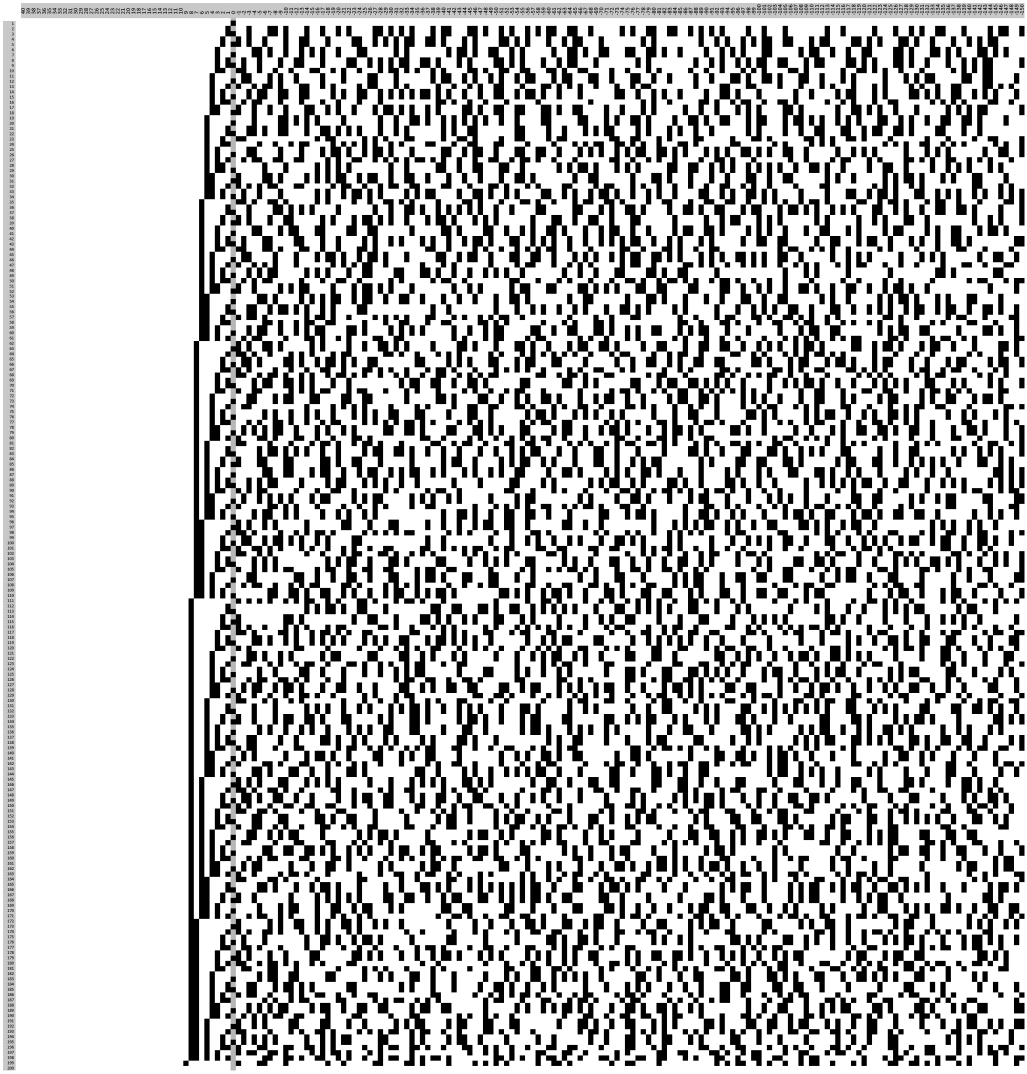


Bild 38: Basis = 1,8

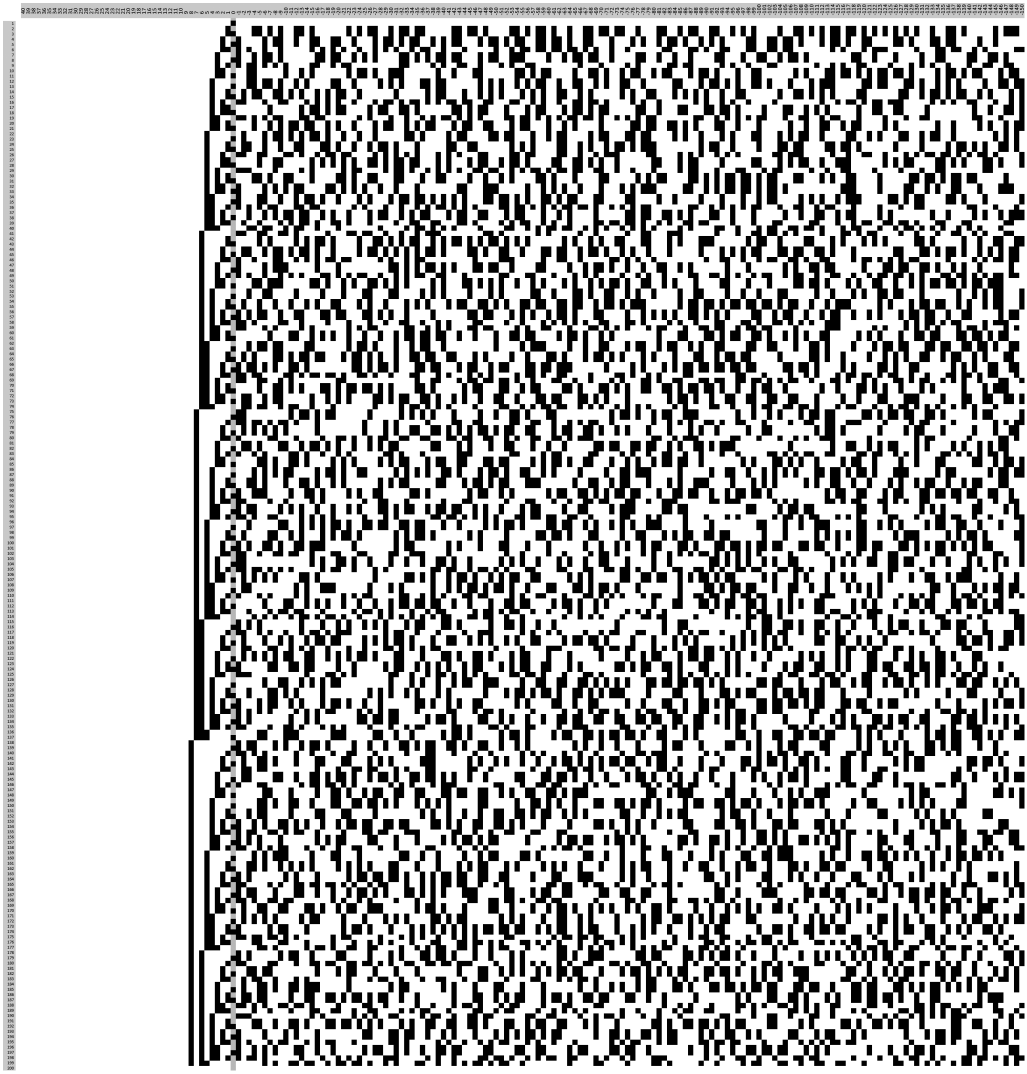


BILD 39: BASIS = 1,85

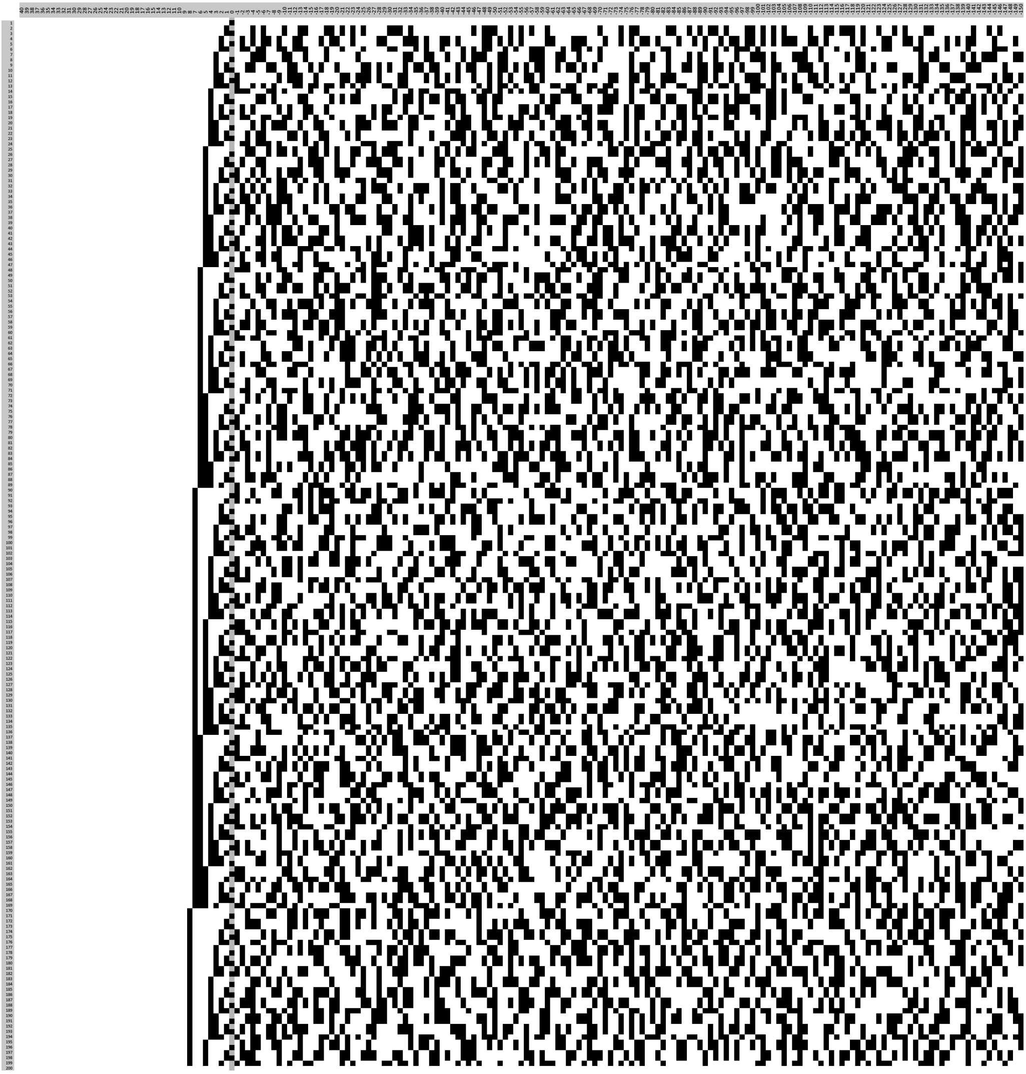


Bild 40: Basis = 1,9

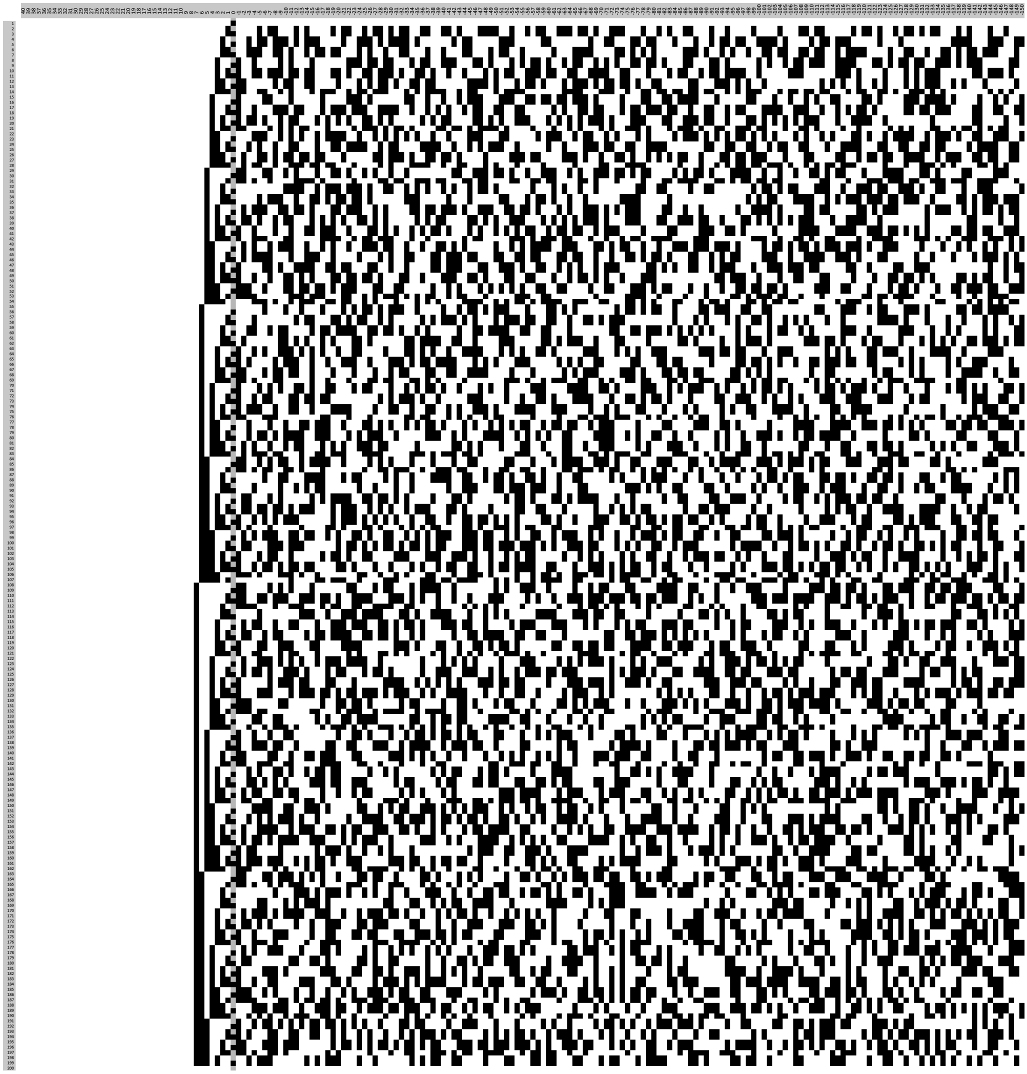


BILD 41: BASIS = 1,95

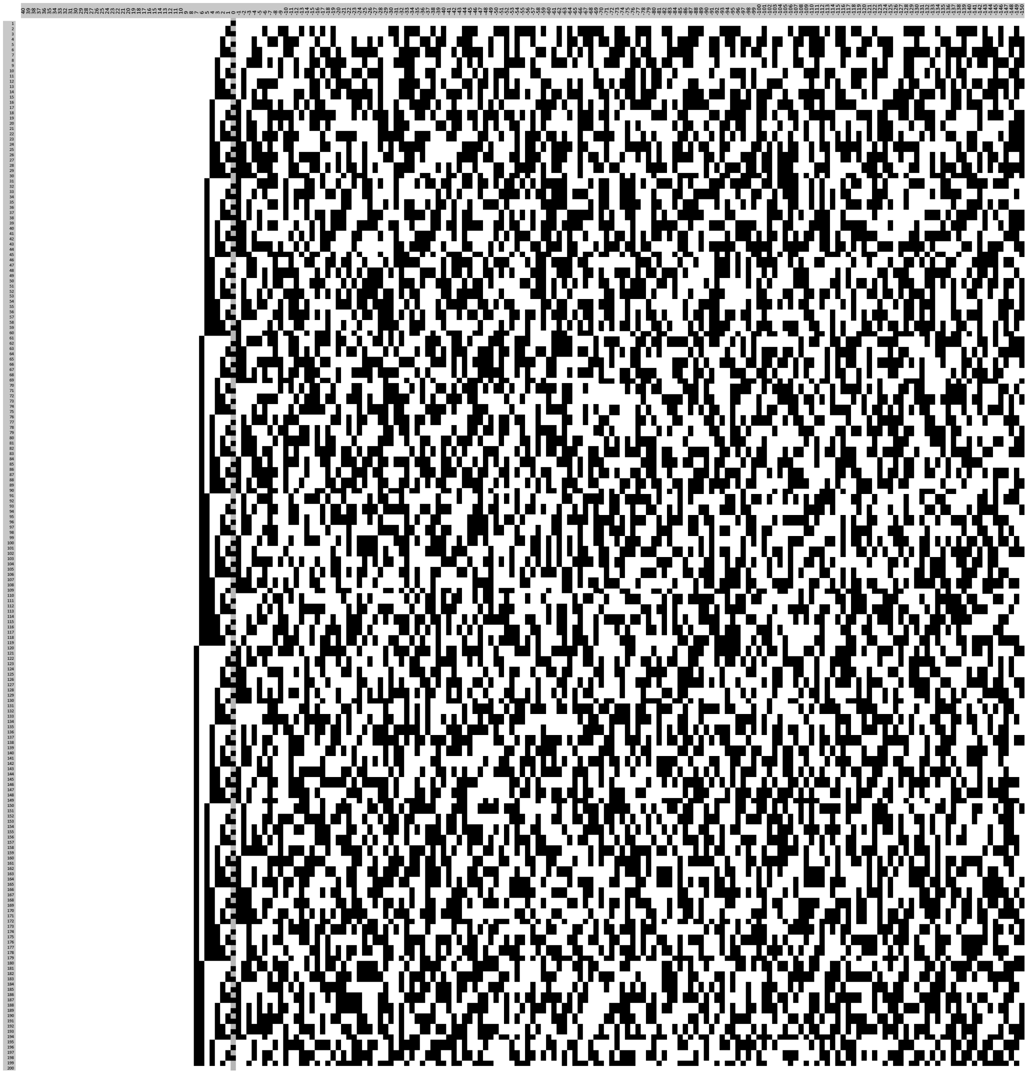


Bild 42: Basis = 1,98

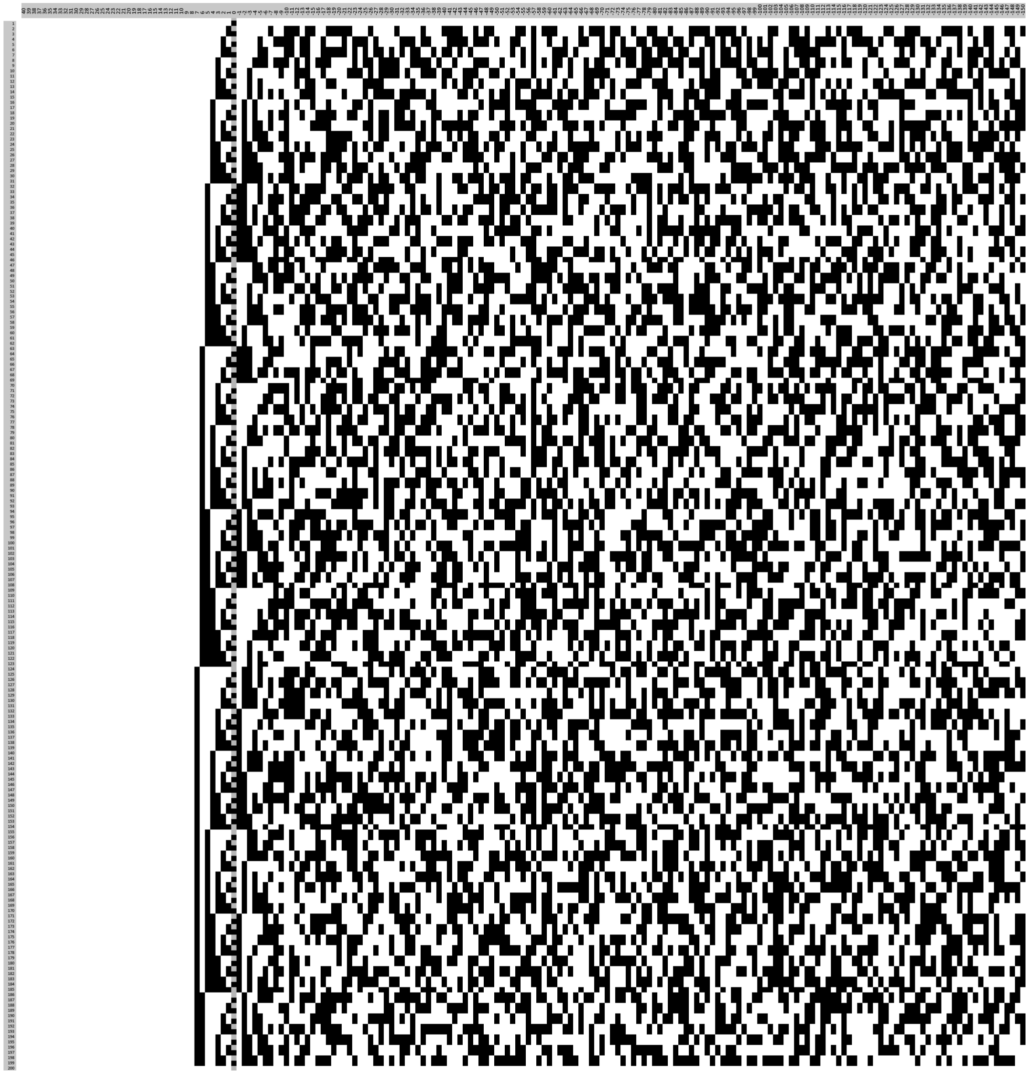


Bild 43: Basis = 1,99

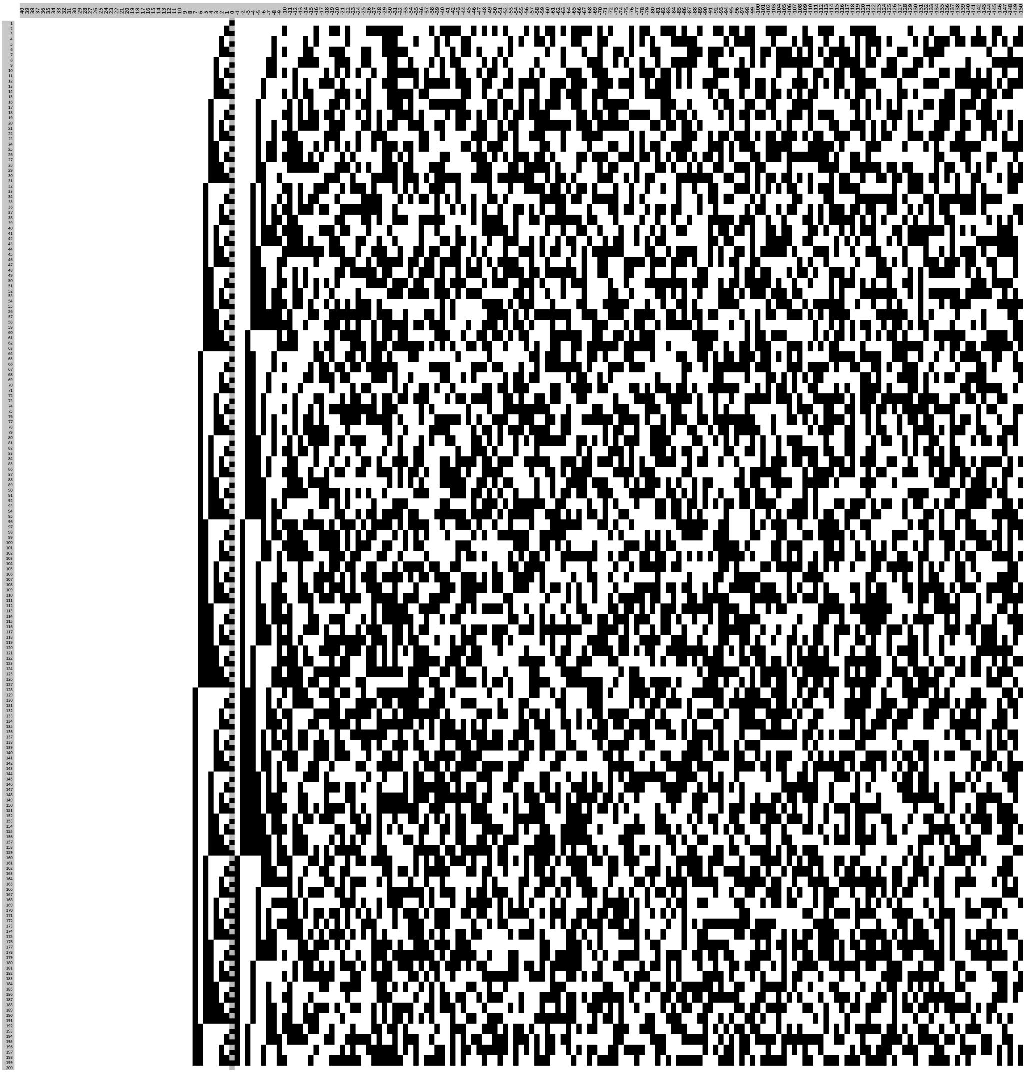


Bild 44: Basis = 1,999

Rechts von der Nulllinie (das ist der Bereich der negativen Potenzen) tut sich ein Spalt auf ...

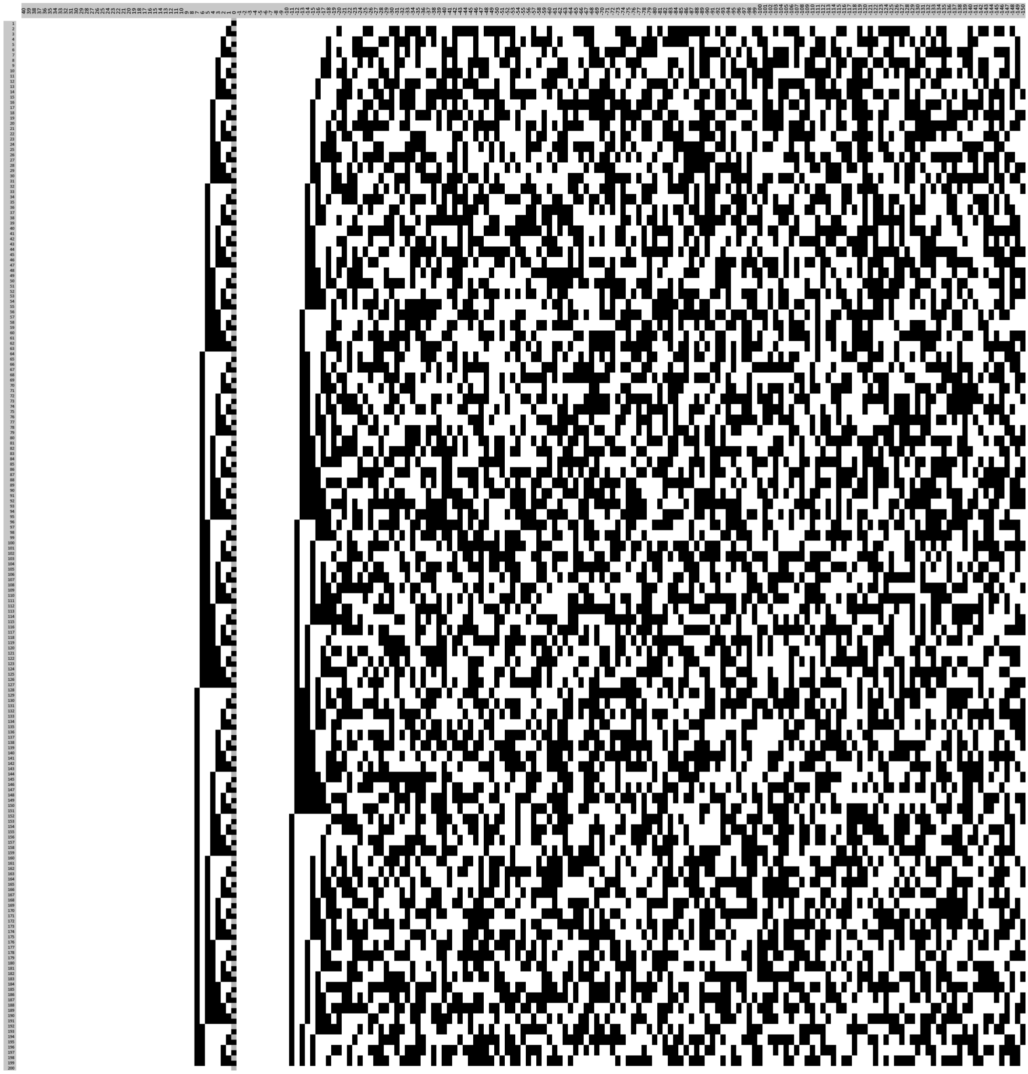


Bild 45: Basis = 1,999999

... der zu einer echten Lücke wird.

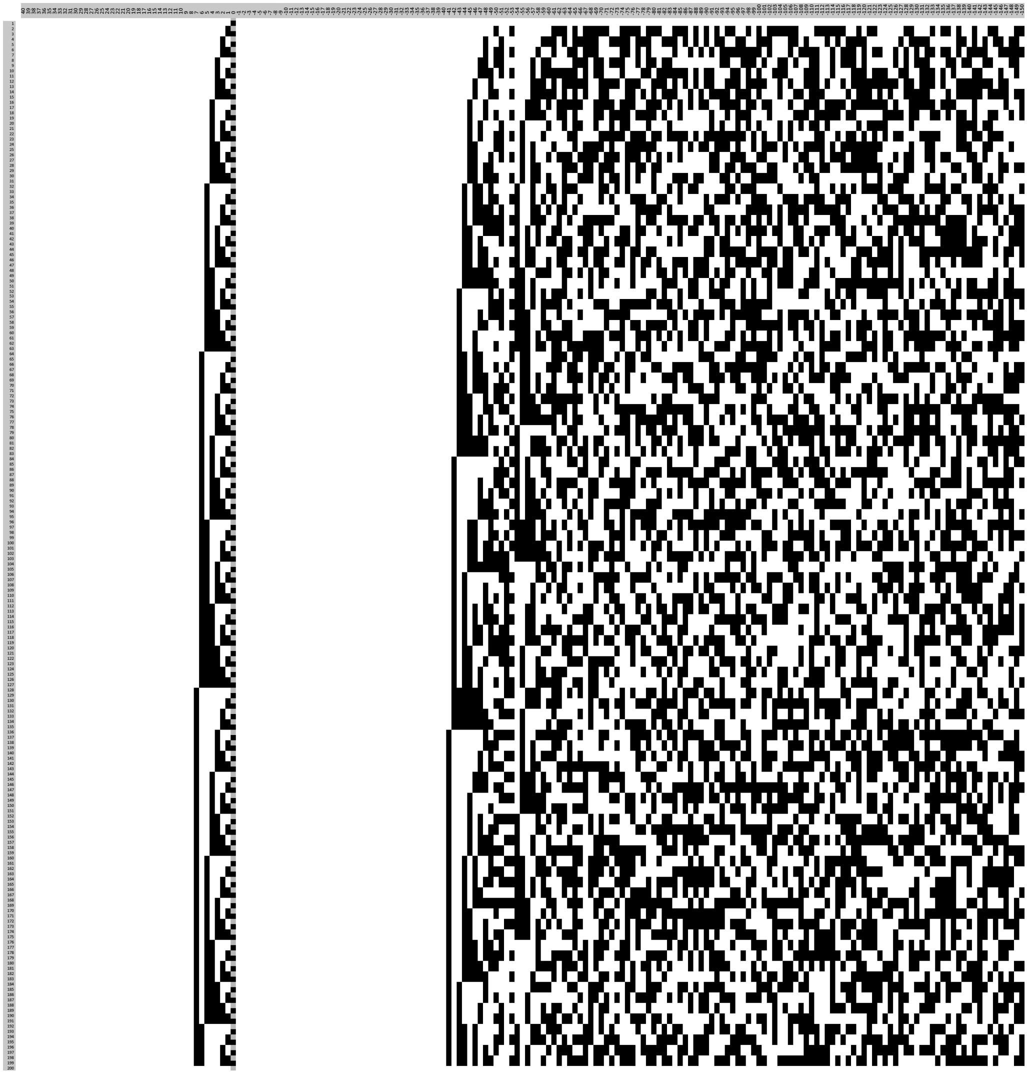


BILD 46: BASIS = 1,999999999999999 (15 Stellen nach dem Komma)

Die Lücke wird zum Loch ...

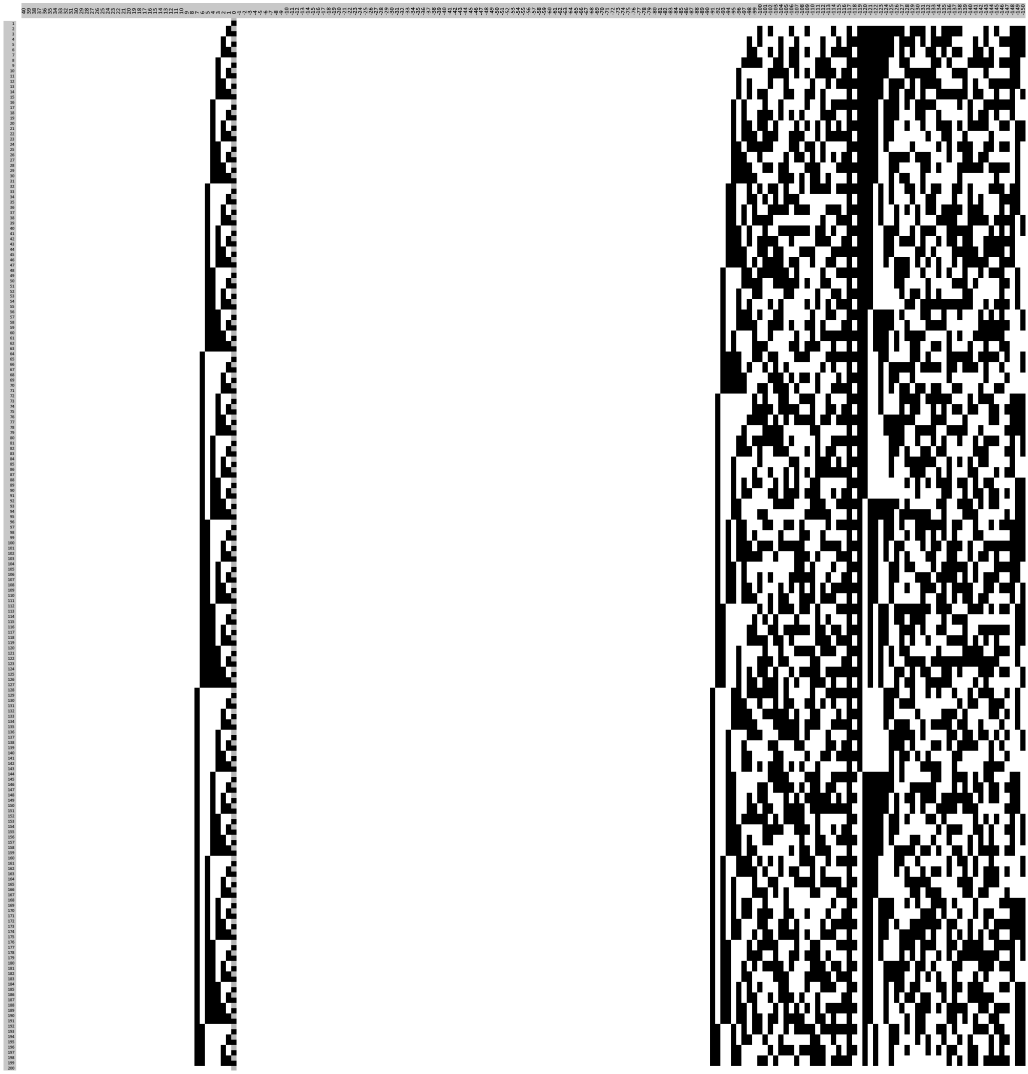


BILD 47: BASIS = 1,999999999999999999999999999999 (30 Stellen nach dem Komma)

... zur Grube ...

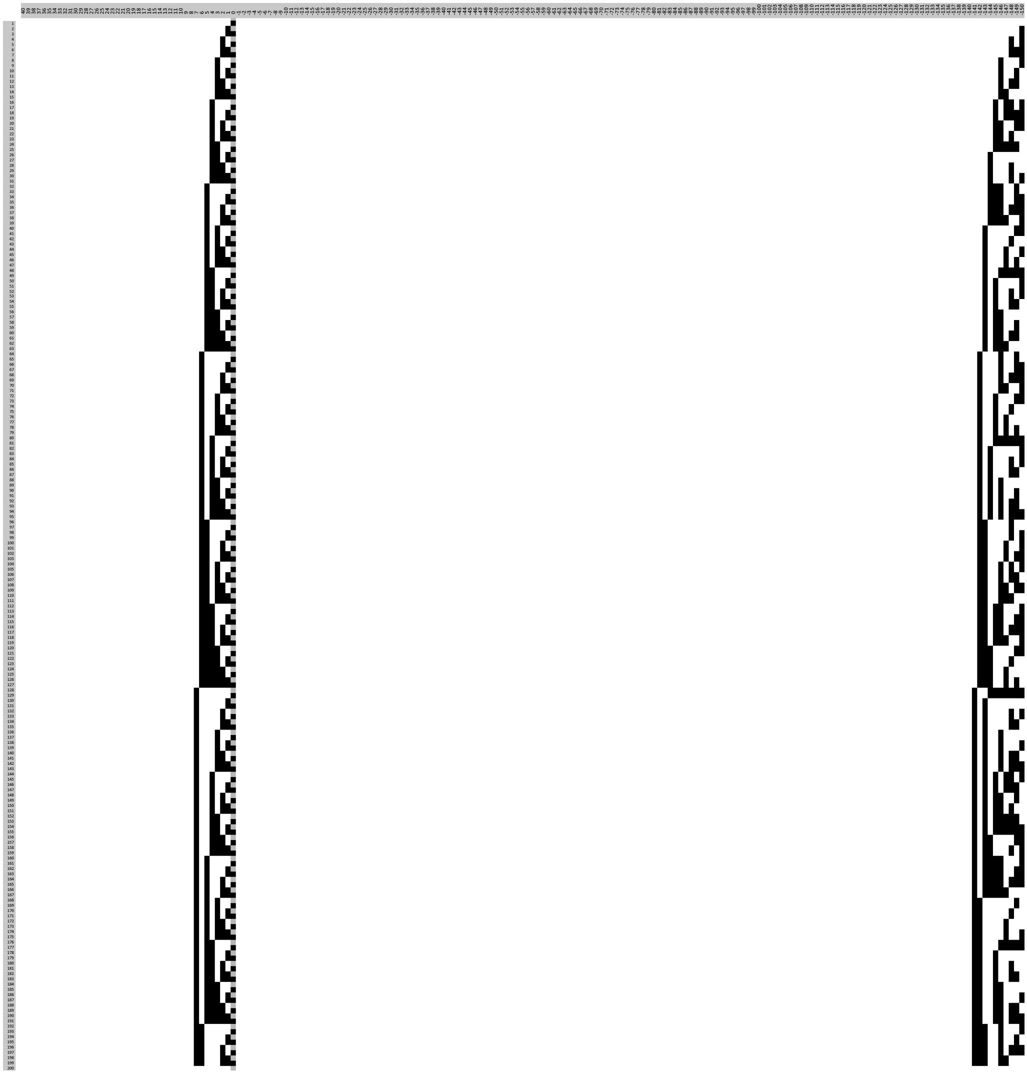


BILD 48: BASIS = 1,999999999999999999999999999999999999999999999 (45 Stellen nach dem Komma)

... zum Abgrund ...

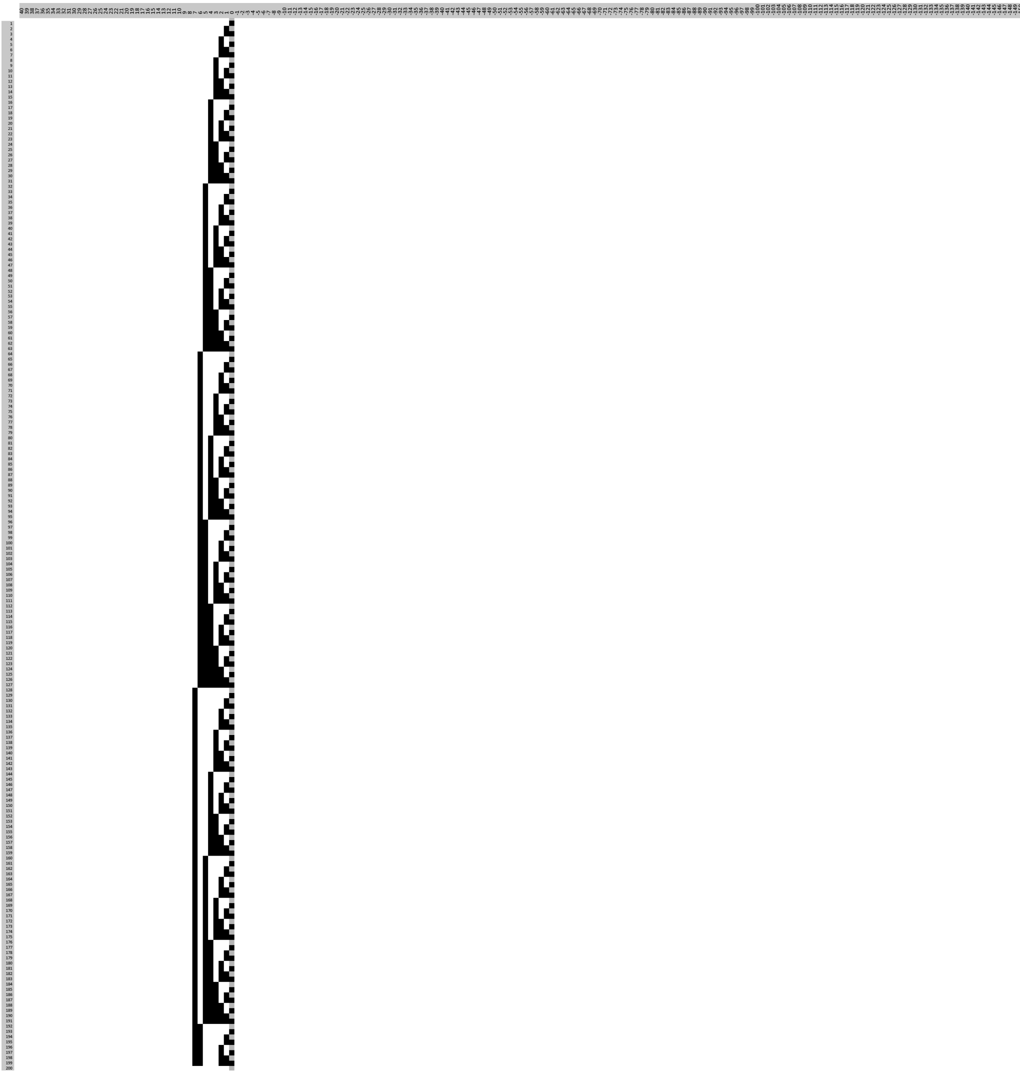


BILD 50: BASIS = 1,99999999999999999999999999999999999999999999999999 (50 Stellen nach dem Komma)

... und verschwindet schließlich völlig aus dem Blickfeld. Wir wissen natürlich, dass »dort draußen« immer noch unsichtbare Punkte sind, aber diese interessieren uns genauso wenig wie ein Stern, der so weit entfernt ist, dass wir ihn mit einem optischen Teleskop nicht mehr auflösen können und er für uns daher unsichtbar ist.

|» Das übriggebliebene Muster entspricht genau den (ausschließlich positiven) Potenzen der Zahl 2 und somit dem Dualsystem, wie es unsere Computer verwenden. In der Technik werden solche schwarz-weißen Muster verwendet, um mit Hilfe von Laserstrahlen z. B. Wegstrecken oder (wenn das gleiche Muster kreisförmig angeordnet ist) Winkel zu messen.

Am anderen Ende unseres Spektrums zwischen 1 und 2, auf der Seite der 1, haben wir die einzelnen Punkte sehr weit auseinandergedehnt gesehen (BILD 19, Seite 139). Wenn wir den Wert unserer Basis sehr, sehr knapp oberhalb von 1 annehmen, dann kommen die einzelnen Punkt sehr, sehr weit voneinander entfernt zu liegen.

Nehmen wir beispielsweise den (gar nicht so knappen) Wert 1,000004 als Basis. Dann befindet sich für die Zahl 1 genau eine 1 auf der Nulllinie (so wie für alle anderen Basiswerte auch). Für die Zahl 2 jedoch liegt ein Punkt unterhalb der Potenz +173.287 und der nächste Punkt unterhalb der Potenz –3.422.500 . Weitere Punkt liegen noch sehr viel weiter entfernt auf der Seite der negativen Potenzen. Ich habe diese Werte mit meinem Taschenrechner berechnet, der negative Wert weist daher eine Ungenauigkeit in der Größenordnung von +/–100 auf, was ich als vernachlässigbar betrachte.

«| Was wir nicht vergessen sollten: Im Grenzbereich zur Basis 1 gibt es eine Besonderheit. Wenn wir den Basiswert als *exakt* 1 annehmen, dann fallen sämtliche Punkte schlagartig völlig in sich zusammen, sodass im Bereich der positiven Potenzen nur noch ein tiefschwarzes Dreieck übrigbleibt (BILD 50A):

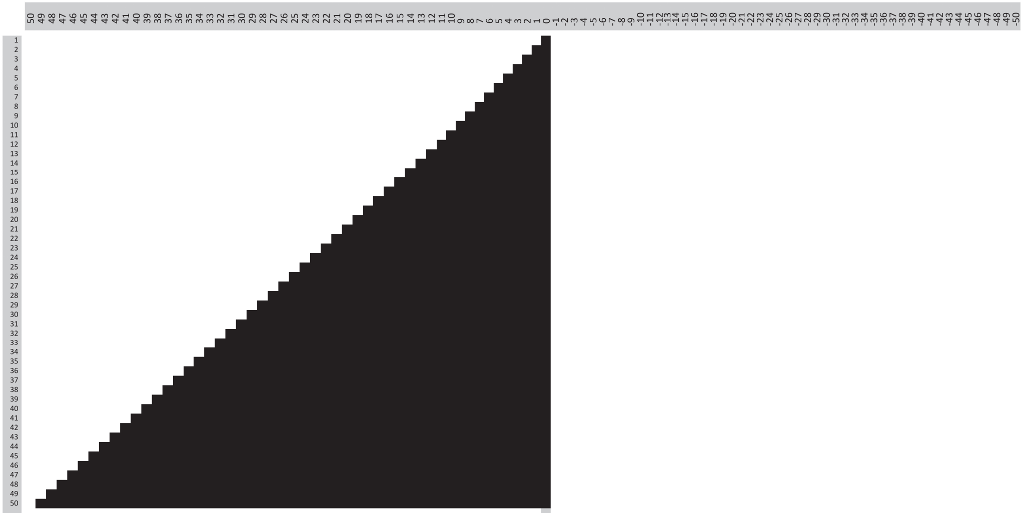


Bild 50a: Basis = 1 (exakt)

ODER:

Genausogut können die schwarzen Punkte *irgendwo* unterhalb der positiven Potenzen bis in die Gegend des Unendlichen herumschwirren. Es muss lediglich gewährleistet sein, dass in der Zeile 1 nur ein Punkt zu finden ist, in der Zeile 2 müssen es genau 2 Punkte sein, usw. Und es dürfen natürlich nicht mehrere Punkte an ein- und derselben Stelle zu liegen kommen. Der Grund für die Beliebigkeit der Position unterhalb der Potenzen ist trivial: Die Zahl 1 kann ich beliebig oft mit sich selbst multiplizieren, sie bleibt stets sie selbst: 1.

Der Bereich der negativen Potenzen (rechts von der Nulllinie) bleibt genauso wie beim Basiswert 2 in Bild 50 komplett weiß.

Brauchbar ist eine solche Konstruktion natürlich nicht. Denn eine Zahl im Zahlensystem mit der Basis 1 heißt nichts anderes, als dass z. B. die Dezimalzahl 19 auf folgende Weise geschrieben wird:

$$19_{10}=1111111111111111111_1$$

Das wäre, als würden wir mit unseren Fingern und Zehen zählen – 19 würden wir gerade noch schaffen ...

|» Nehmen wir nun jenen Bereich unter die Lupe, ab dem die Dichte der einzelnen Punkte so groß wird, dass diese den Mindestabstand von 1 zueinander nicht mehr einhalten können.

Dieser Übergang muss irgendwo im Bereich zwischen den Basiszahlen 1,6 und 1,65 auftreten. Uns dämmert natürlich bereits, wo dieser Bereich genau liegen wird ...

Doch greifen wir nicht vor – tasten wir uns ganz seriös Schritt für Schritt heran. Auf diese Weise sehen wir auch, welche Veränderungen stattfinden, während wir uns unserem Ziel immer mehr annähern.

Hilfst du mir wieder mit deiner Software?

«| Gerne! Mein Computer scharrt schon mit den Hufen.

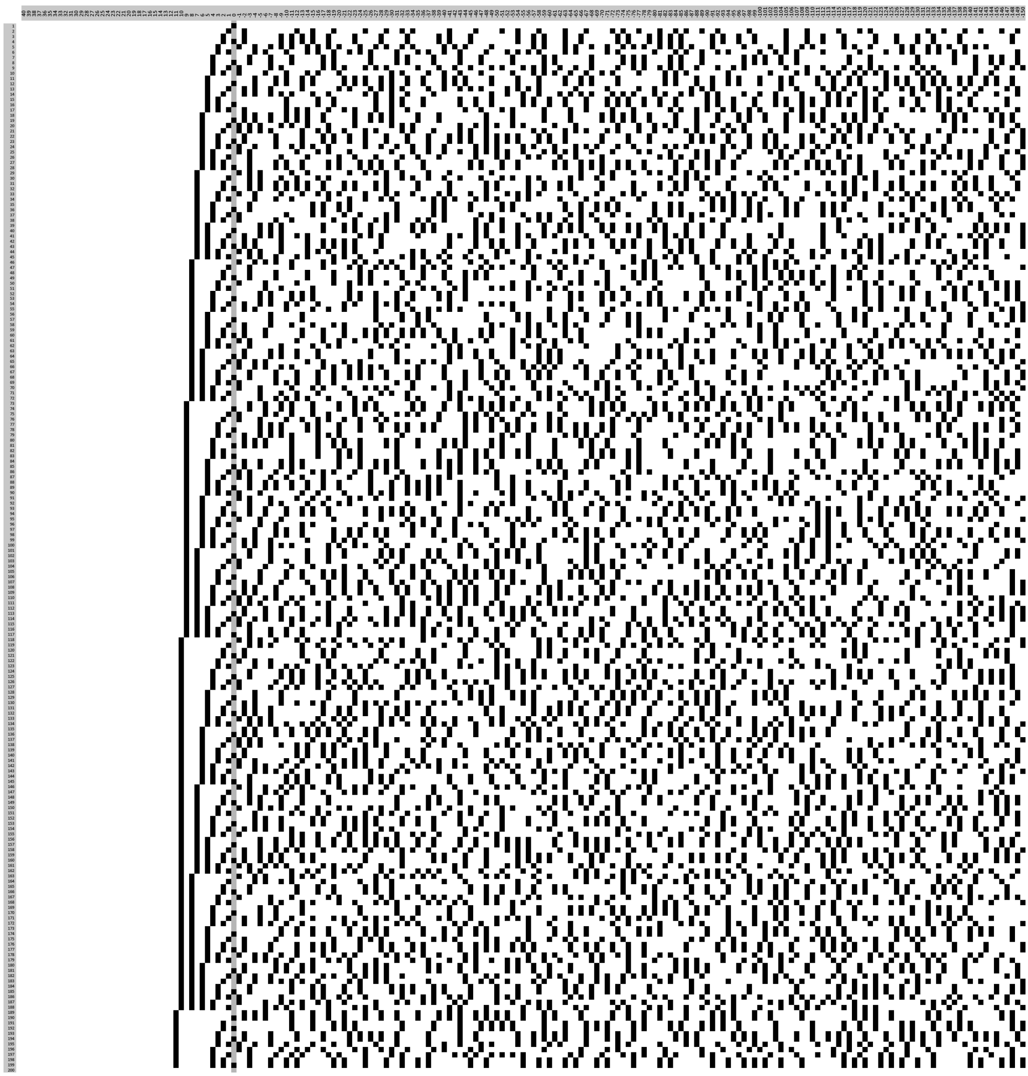


Bild 51: Basis = 1,61

Bei der Basiszahl 1,61 ist noch keine »Paarbildung« erkennbar.

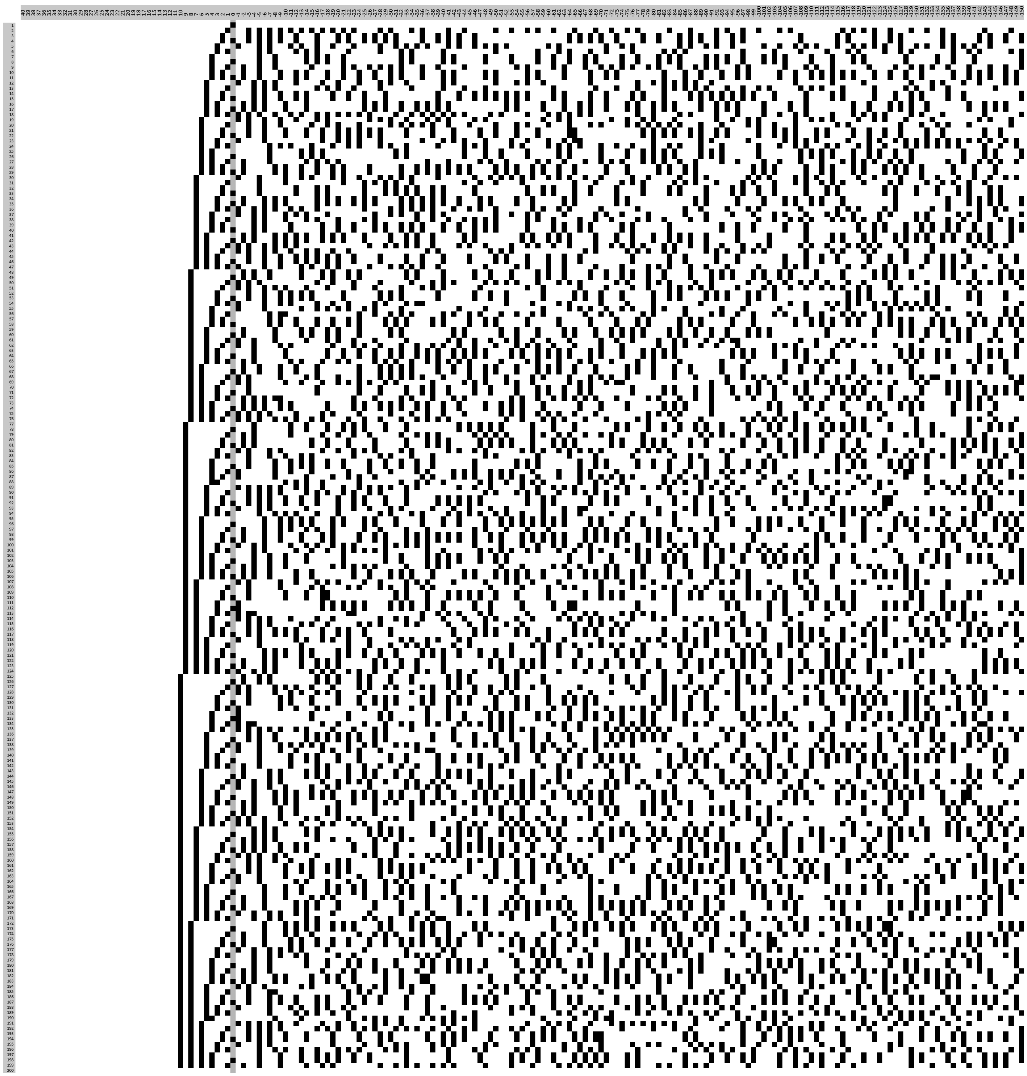


BILD 52: BASIS = 1,62

Bei 1,62 jedoch sind bereits einige »Doppelpunkte« zu sehen. Wir nehmen uns als Nächstes daher die Basiszahl zwischen 1,61 und 1,62 vor: 1,615

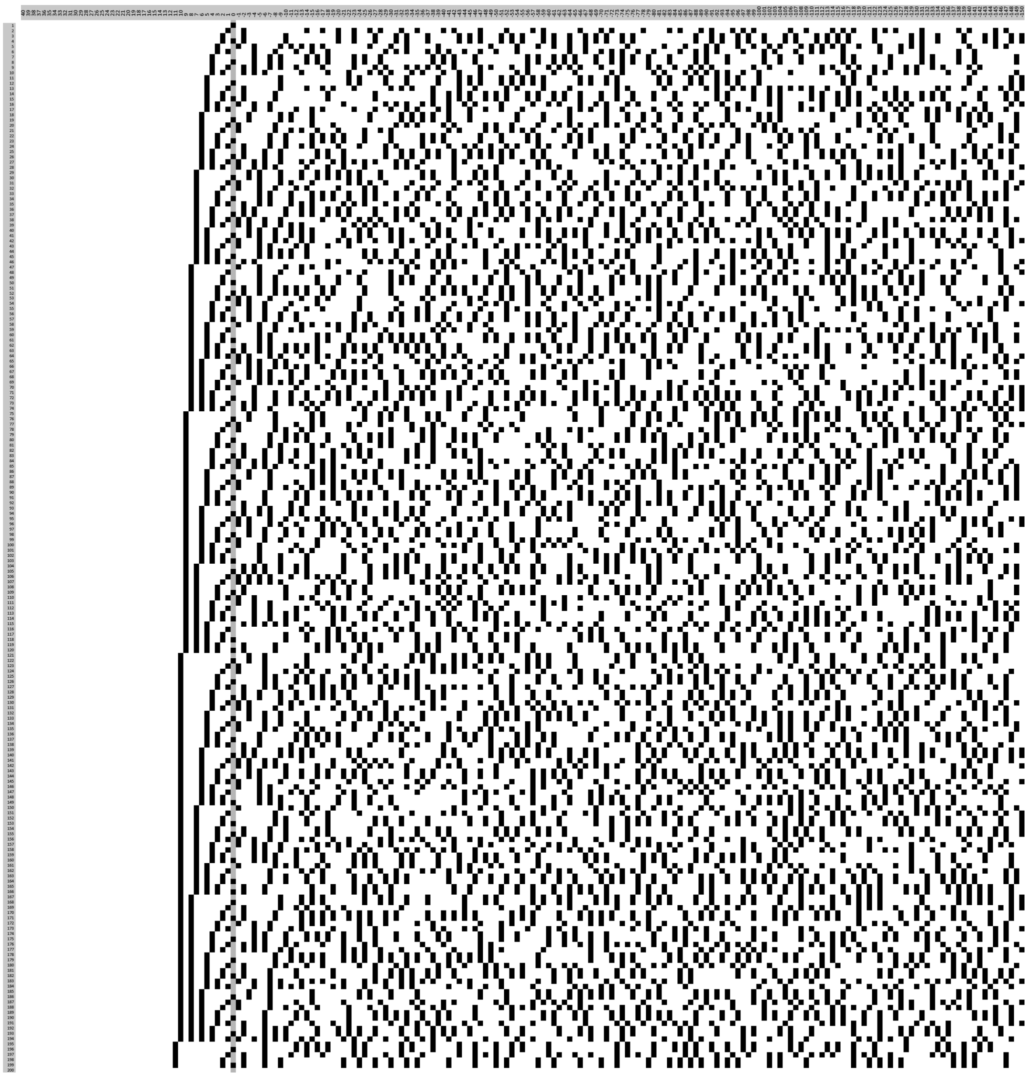


Bild 53: Basis = 1,615

Wir liegen zu niedrig. Hier sind noch keine Paare zu sehen.

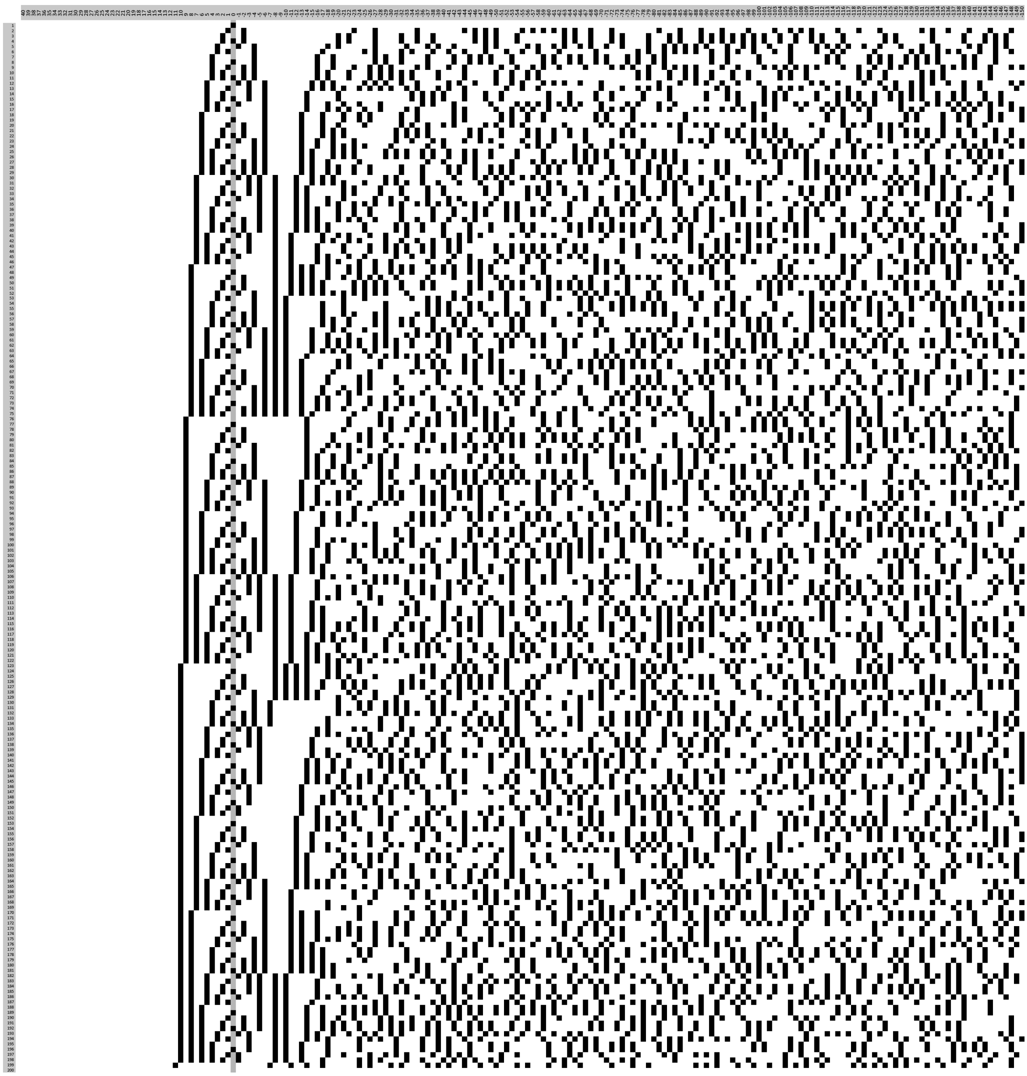


BILD 54: BASIS = 1,618

Bei 1,618 zeigt das Muster fast schlagartig eine auffällige Veränderung!

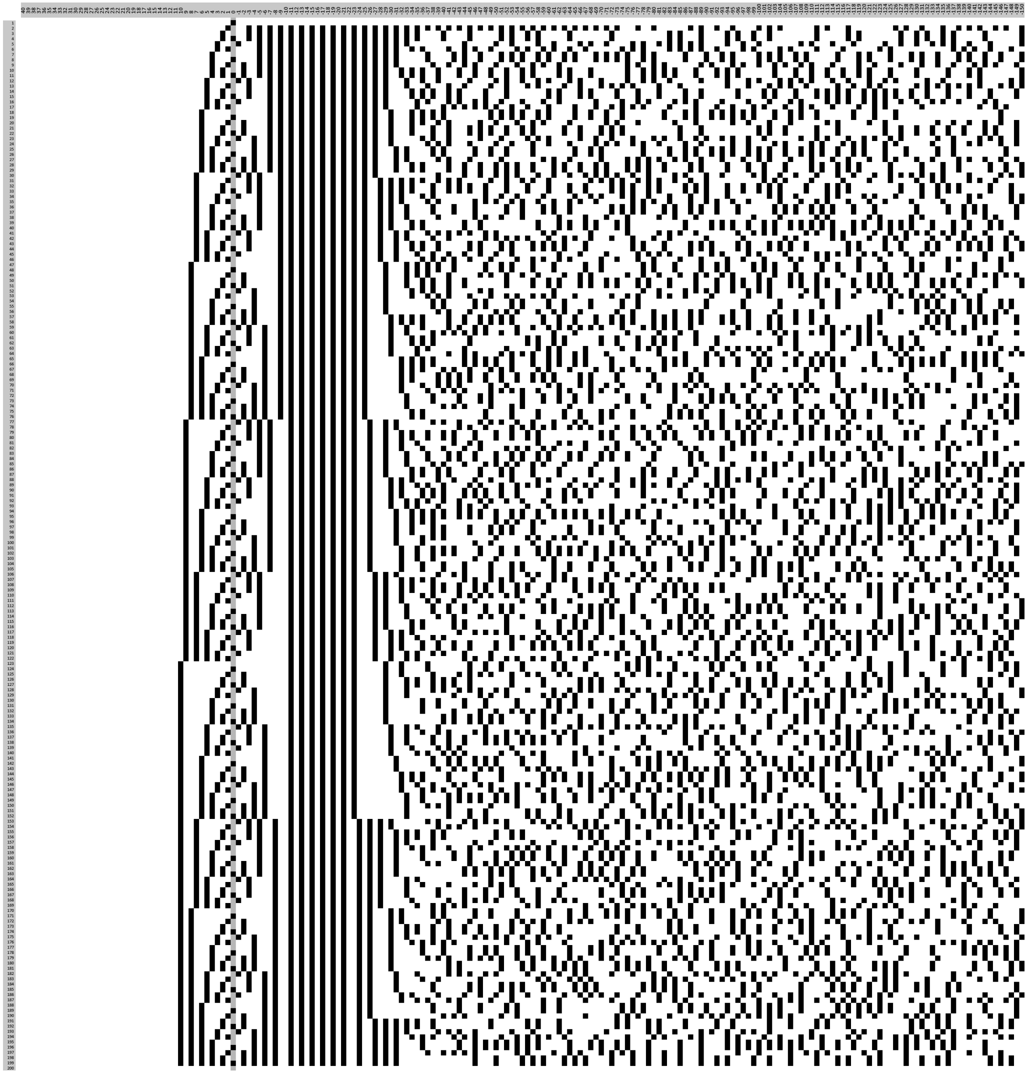


Bild 55: Basis = 1,618034

Wir erhöhen die Genauigkeit in Richtung der Zahl Φ (wir wissen natürlich längst, dass genau hier der Übergang stattfindet) auf 6 Stellen nach dem Komma. Eigenartig ist die plötzliche Fülle an durchgehend schwarzen Linien nach unten.

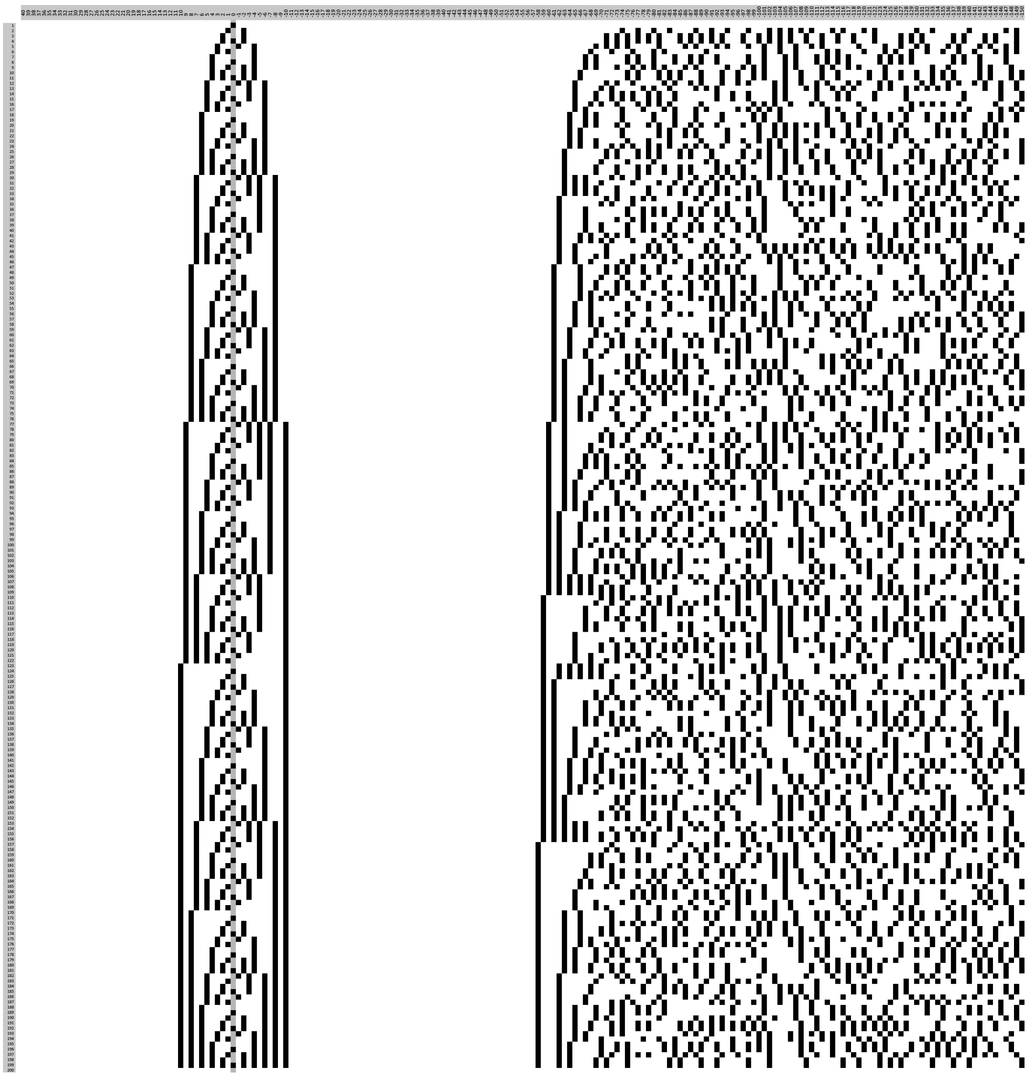


Bild 56: Basis = 1,618033988749894

Bei einer Genauigkeit von 15 Stellen nach dem Komma sind diese wieder verschwunden und weichen einer wirklich großen, rein weißen Lücke.

|» Was passiert, wenn ich die Basiszahl an der letzten (der 15.) Stelle um eine einzige Ziffer erhöhe (also von 1,618033988749894 auf 1,618033988749895)?

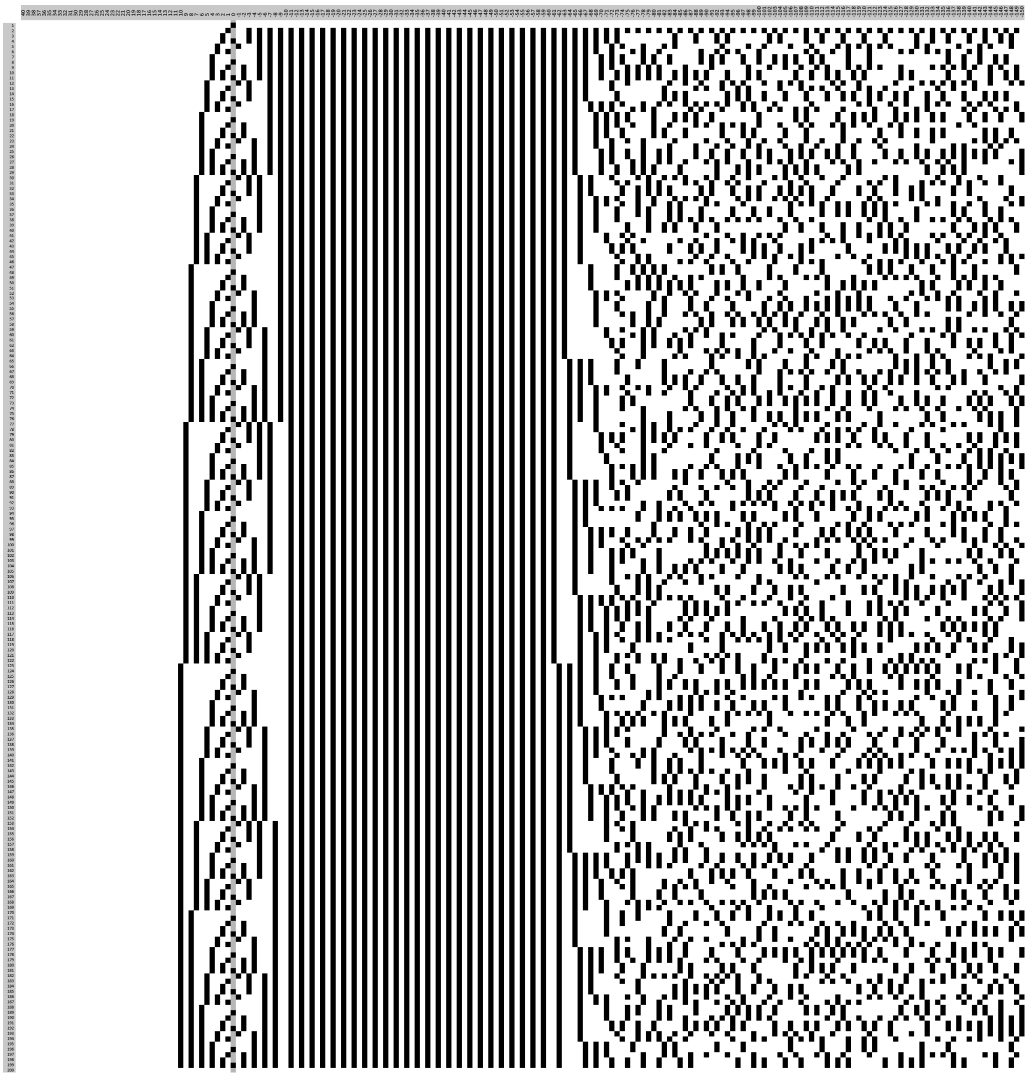


BILD 57: BASIS = 1,618033988749895

«| Das hier passiert! Wenn die Basiszahl ganz knapp oberhalb der Zahl Φ liegt, dann ist die Lücke mit schwarzen Streifen gefüllt, während sie bei Werten ganz knapp unterhalb von Φ »leer« bleibt.

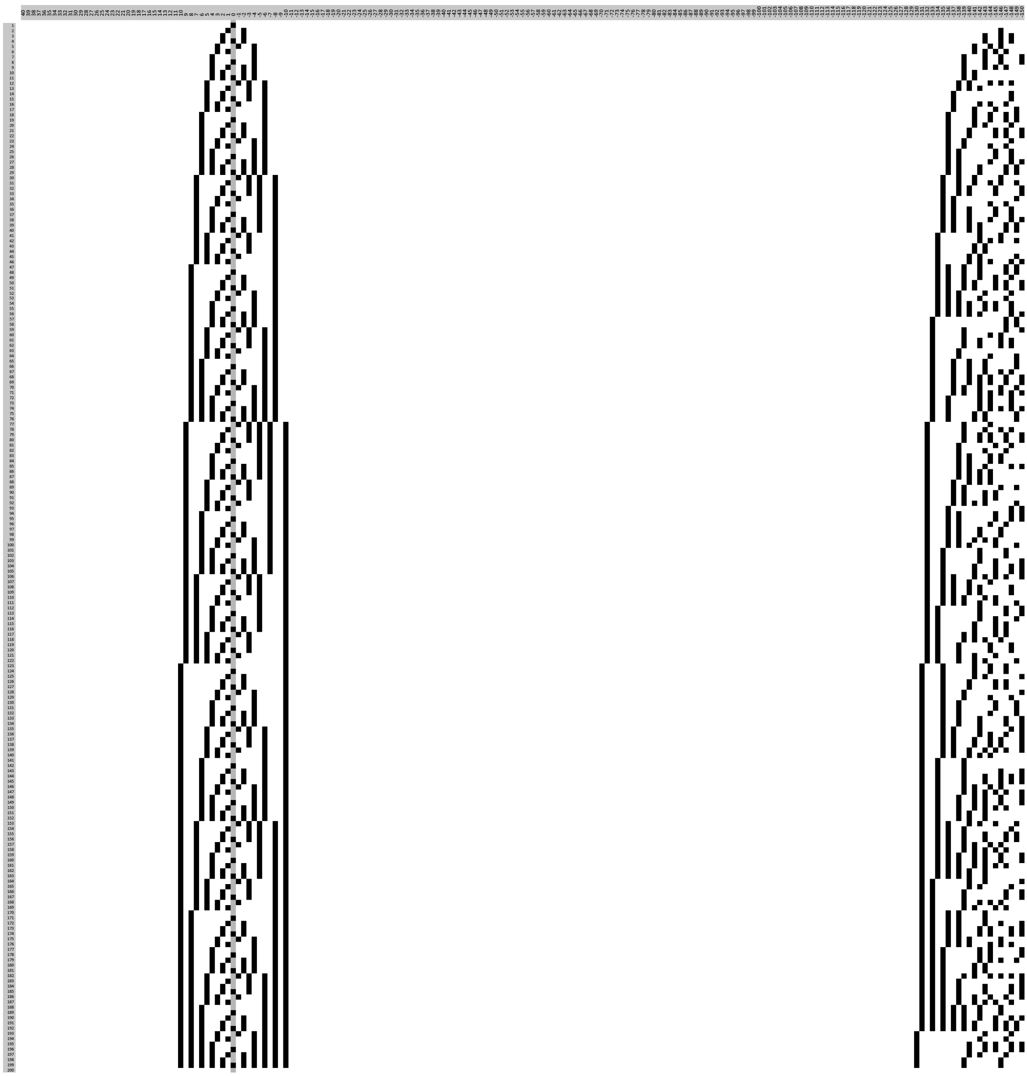


Bild 58: Basis = 1,618033988749894848204586834365 (30 Stellen nach dem Komma)

Bei einer Genauigkeit von 30 Stellen nach dem Komma ist der Graben bereits recht groß, und alleine aufgrund des Musters können wir sofort sehen, dass die Basiszahl ganz knapp *kleiner* als Φ ist. Außerdem weist der »Schatten« auf der rechten Seite eine große Ähnlichkeit mit dem »Original« auf.

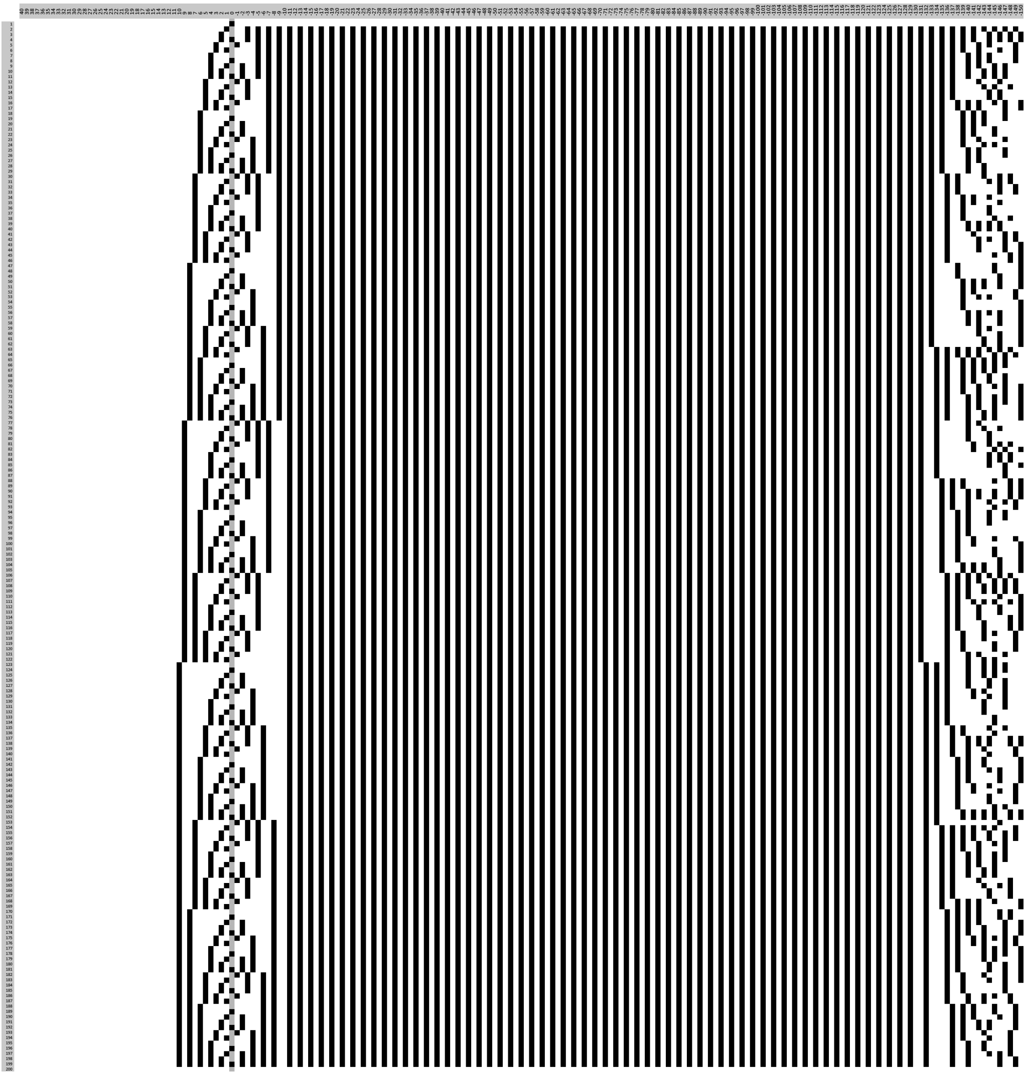


BILD 59: BASIS = 1,618033988749894848204586834366 (30 Stellen nach dem Komma)

Hier wurde zum Vergleich die Basiszahl an der 30. Stelle nach dem Komma um eine Ziffer erhöht. Sofort ist der »Graben« mit durchgehenden Streifen gefüllt.

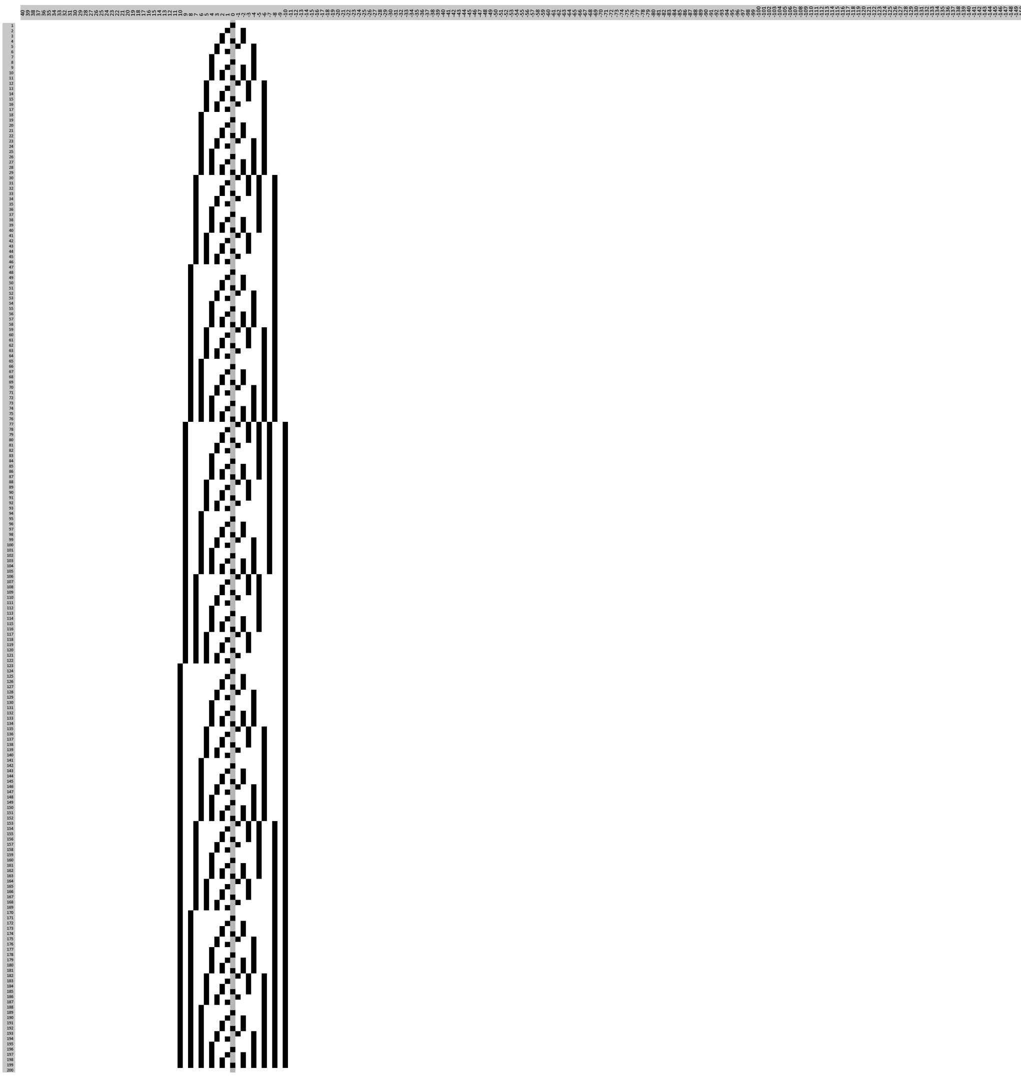


BILD 60: BASIS = 1,61803398874989484820458683436563811772030917980576 (50 Stellen nach dem Komma)

Bei einer Genauigkeit von 50 Stellen nach dem Komma bleibt nur noch dieses Muster übrig. Es zeigt eine wunderbare Symmetrie! Es ist nämlich ganz und gar nicht symmetrisch, und dennoch sehr symmetrisch.

|» Wir heben es uns für ein wenig später auf, diese »asymmetrische Symmetrie« genauer zu untersuchen.

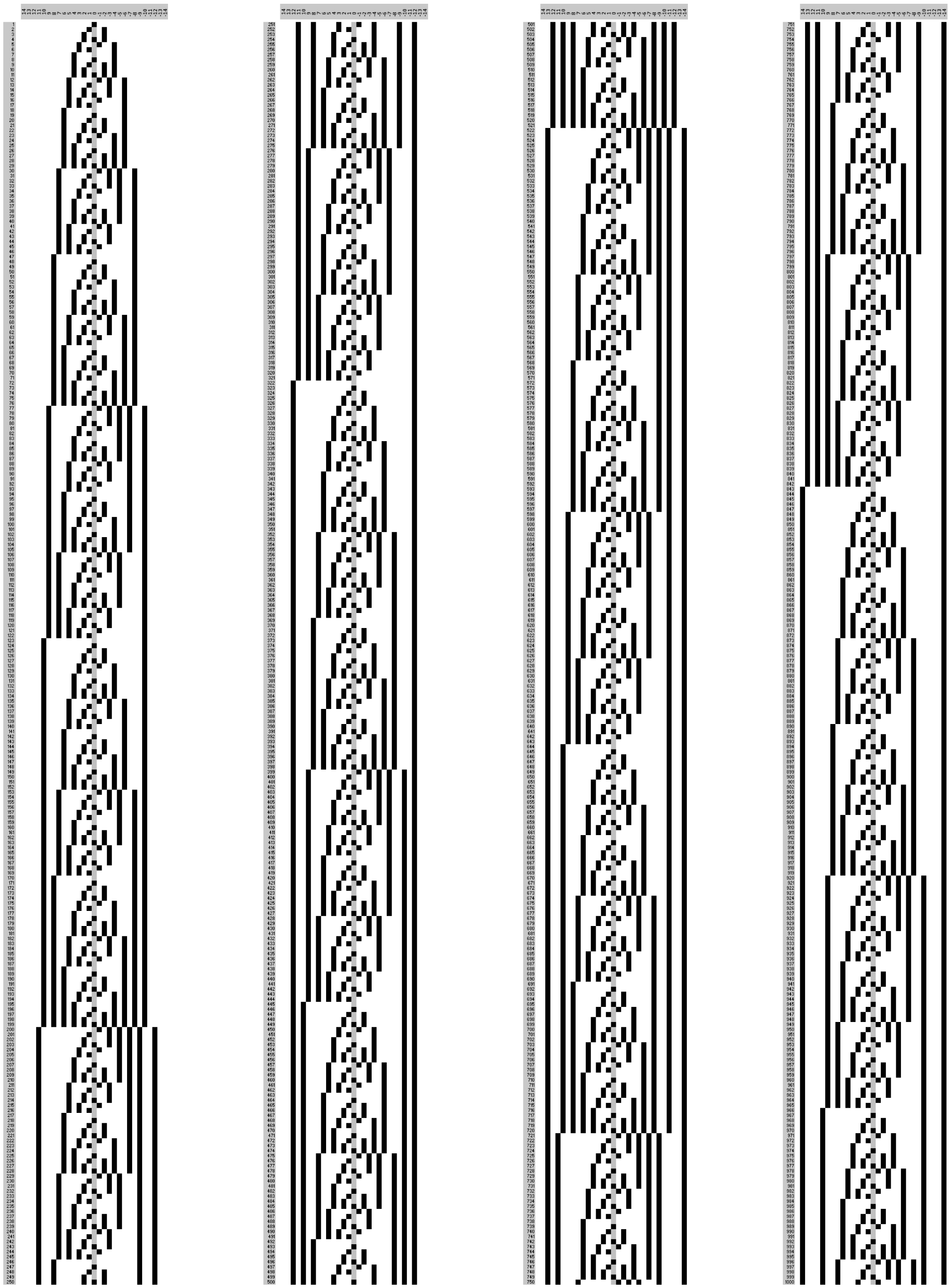


BILD 61: BASIS = Φ = 1,61803398874989... für alle natürlichen Zahlen von 1–1000

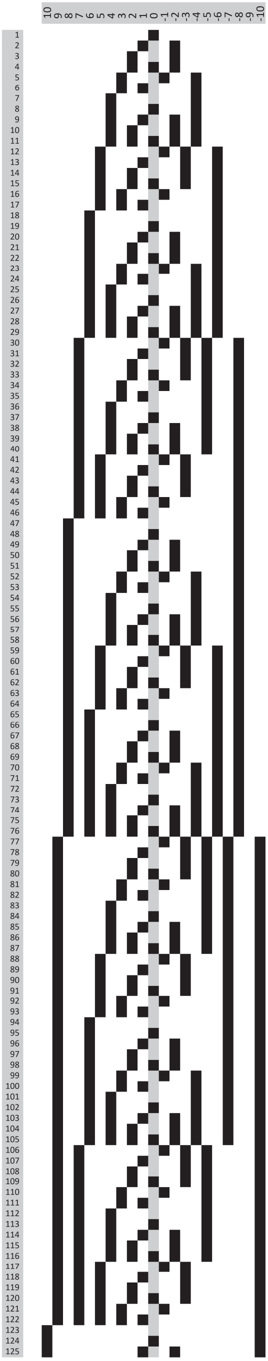


BILD 62

Nehmen wir zunächst einmal ein paar Stichproben und kontrollieren, ob die Werte des Musters auch tatsächlich lauter ganze Zahlen liefern. Ich wähle für die Stichproben die Zahlen 14, 23, 65 und 119.

$$14=\Phi^{5}+\Phi^{2}+\Phi^{-3}+\Phi^{-6}$$

Mein Taschenrechner, in dem ich Φ als Konstante mit einer Genauigkeit von 12 Dezimalstellen gespeichert hatte, sagt dazu: Ja, es stimmt!

«| Wir können das auch mithilfe unserer vereinfachten Methode der Potenzenberechnung überprüfen und verwenden dafür die Tabelle auf Seite 99:

$$\begin{aligned}14 &= \Phi^{5}+\Phi^{2}+\Phi^{-3}+\Phi^{-6}\\ &= (5\Phi+3)+(\Phi+1)+(2\Phi-3)+(-8\Phi+13)\\ &= 0\Phi+14\end{aligned}$$

|» Perfekt! Überprüfe bitte auch noch die anderen Stichproben.

$$\begin{aligned}23 &= \Phi^{6}+\Phi^{3}+\Phi^{-1}+\Phi^{-4}+\Phi^{-6}\\ &= (8\Phi+5)+(2\Phi+1)+(\Phi-1)+(-3\Phi+5)+\\ &\quad (-8\Phi+13)\\ &= 0\Phi+23\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}65 &= \Phi^{8}+\Phi^{6}+\Phi^{-6}+\Phi^{-8}\\ &= (21\Phi+13)+(8\Phi+5)+(-8\Phi+13)+\\ &\quad (-21\Phi+34)\\ &= 0\Phi+65\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}119 &= \Phi^{9}+\Phi^{7}+\Phi^{5}+\Phi^{2}+\Phi^{-3}+\Phi^{-10}\\ &= (34\Phi+21)+(13\Phi+8)+(5\Phi+3)+\\ &\quad (\Phi+1)+(2\Phi-3)+(-55\Phi+89)\\ &= 0\Phi+119\end{aligned}$$

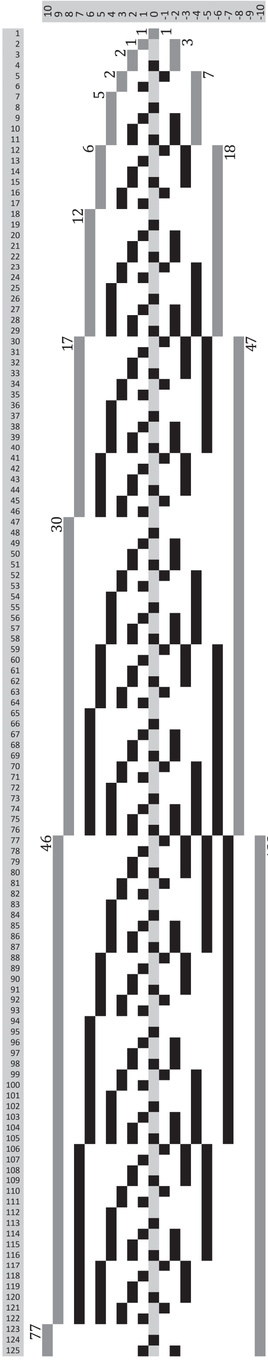


Bild 63

«| Alles hat seine Richtigkeit! Die »Φ-Anteile« werden jeweils 0, sodass nur die ganzzahligen Anteile übrigbleiben, und diese ergeben immer genau die gesuchte ganze Zahl.

|» Wie lang sind denn die einzelnen »Streifen« in unserem Muster? Gibt es in dieser Hinsicht eine bestimmte Gesetzmäßigkeit?

«| Ja, die gibt es. Ich habe in Bild 63 für's Erste die Länge der Streifen der äußeren »Hülle« eingetragen. Was sofort zu sehen ist, ohne dass man die Längen abzählen muss: Die Hüllstreifen auf der »Innenseite« (rechts von der Nulllinie, unterhalb der negativen Potenzen) haben jeweils die Länge der zwei gegenüberliegenden Streifen auf der »Außenseite«. Wenn man die Länge der Streifen misst, dann stellt sich heraus, dass »außen« die Längen jeweils abwechselnd um 1 größer oder um 1 kleiner als die Zeilensummen im Phi-Dreieck sind (Tabelle 4 auf Seite 45). Diese Zeilensummen entsprechen auch, wie wir bereits wissen, den ganzzahlig gerundeten Potenzen von Φ bzw. den Gliedern der Lucas-Folge.

$$\begin{aligned} 1 &= 2-1 \\ 2 &= 1+1 \\ 2 &= 3-1 \\ 5 &= 4+1 \\ 6 &= 7-1 \\ 12 &= 11+1 \\ 17 &= 18-1 \\ 30 &= 29+1 \\ 46 &= 47-1 \\ 77 &= 76+1 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

|» Du hast in deiner Liste den Wert für die erste 1 nicht eingetragen! Bild 63 beginnt mit 1 • 1 • 2 • 2 • 5 • 6 • 12 ..., deine Liste jedoch mit 1 • 2 • 2 • 5 • 6 • 12 ...

«| [*Seufzt*] Du hast wie meistens recht. Aber der Wert, der dort hingehört, hat mich ein wenig irritiert.

|» Das ist noch lange kein Grund, ihn heimlich unter den Tisch fallen zu lassen. »Anfangswerte« in unseren Reihen, Tabellen und Bildern sind ohnehin meistens irgendwelche »Löcher« oder nehmen gleichzeitig unterschiedliche Werte an.

«| Das ist auch hier der Fall. Der Wert an der ersten Stelle ist nämlich 0:

$$\begin{array}{rcrl} 1 = & -1 & +1 & = 0 \\ 1 = & 2 & -1 & \\ 2 = & 1 & +1 & \\ 2 = & 3 & -1 & \\ 5 = & 4 & +1 & \\ 6 = & 7 & -1 & \\ \vdots & \vdots & & \end{array}$$

Auf der »Innenseite« entsprechen die Streifenlängen übrigens genau den jeweils zweiten Werten der Lucas-Folge. Und der erste Wert ist konsequenterweise auch wieder »falsch«:

$$\begin{array}{rcr} 2 & \rightarrow & 1 \\ 1 & & \\ 3 & \rightarrow & 3 \\ 4 & & \\ 7 & \rightarrow & 7 \\ 11 & & \\ 18 & \rightarrow & 18 \\ 29 & & \\ 47 & \rightarrow & 47 \\ 76 & & \\ 123 & \rightarrow & 123 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

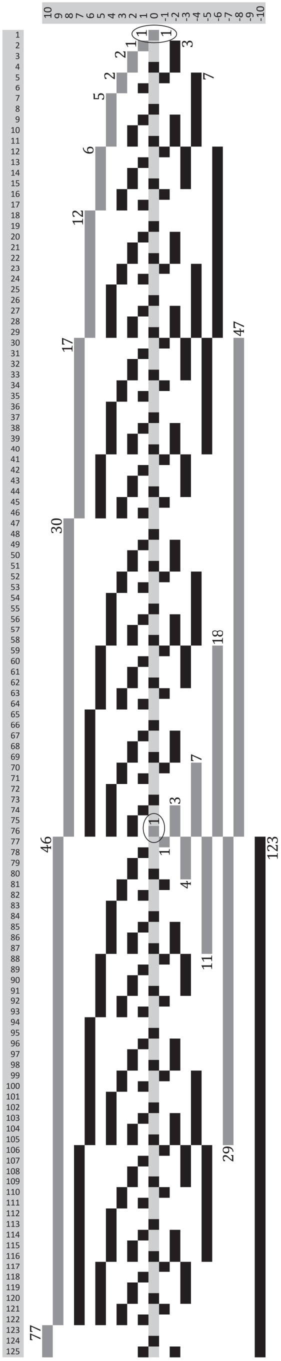


Bild 64

|» Kannst du uns Näheres über die Entstehung der Längen auf der Innenseite sagen? Es sind ja auch andere Längen als jene auf der »Außenhülle« vorhanden.

«| Das stimmt. Es gibt dort alle Werte der Lucas-Folge. Die Lucas-Folgen wachsen allerdings im Gegensatz zur Außenseite nicht »entlang der Nulllinie« sondern fächerförmig »quer zur Nulllinie«, wobei die Zweige des Fächers abwechselnd nach oben und unten wachsen. Ich bezeichne ab sofort die Elemente auf der Außenseite (positive Potenzen) als *Ast* und jene auf der Innenseite (negative Potenzen) als *Fächer* (Bild 64). Der erste Wert (1) ist wie immer »falsch«. Er müsste entsprechend der Lucas-Folge den Wert 2 haben. Allerdings liegt dieser erste Wert auf der Nulllinie und teilt sich diese Position mit einem »Ast der Länge 1« in Richtung Außenseite.

Untersucht man die Entstehung der Äste genauer, stellt man fest, dass diese jeweils an der Nulllinie beginnend nach außen und nach unten wachsen. Man kann sich das so vorstellen, dass sie »nach außen gedrückt« werden, und zwar so, dass immer ein Mindestabstand von 1 zum äußeren Ast hin gewährleistet ist. Das geschieht so lange, bis kein Ast mehr innerhalb der Begrenzung des äußersten Astes Platz hat. Dann weicht der äußerste Ast auf eine neue Ebene aus (die Potenz des Abschnitts wird um 1 erhöht), und von innen her wachsen weitere Äste nach, solange, bis wieder der gesamte Raum innerhalb des äußersten Astes mit den neuen Ästen aufgefüllt ist.

|» Ich habe Schwierigkeiten, mir dieses Wachstum deiner Äste vorzustellen. Zeichne mir das bitte ein wenig detaillierter auf!

«| Gerne. Ich beginne mit der ganzen Zahl 1 und arbeite mich von dort aus weiter voran. Die »Innenseite« interessiert uns im Moment noch nicht, daher konzentriere ich mich für's Erste nur auf die Außenseite mit den positiven Potenzen. Die Zahl 1 entspricht dem Ursprung des gesamten Musters, sie liegt genau auf der Nulllinie und ist »wie üblich falsch«, aber genau das ist an dieser Stelle wohl richtig ...

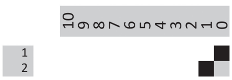


Bild 65

Der erste Ast, der zu wachsen beginnt, ist der äußere »Hüllen-Ast«. Er springt unmittelbar nach seinem Ursprung auf der Nulllinie auf eine neue Ebene (mit der Potenz 1). Von dort aus hat er die Tendenz, auf dieser Potenzlinie zu bleiben und geradewegs nach unten weiterzuwachsen (wie in Bild 66 durch das mittelgraue Quadrat angedeutet).

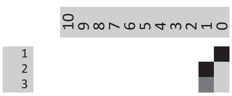


Bild 66

Allerdings muss mit jedem Schritt nach unten ein weiteres »Teilstück« dazukommen, das wiederum von der Nulllinie aus zu wachsen beginnt. Ein solches Teilstück hat unterhalb des äußeren Astes aber nicht Platz, da es damit gegen die Regel des Mindestabstands von 1 verstoßen würde.

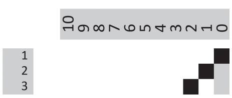


Bild 67

Also findet das Wachstum nicht an einer neuen Astwurzel auf der Nulllinie statt, sondern am äußeren Ast, der damit auf eine neue Ebene (mit der Potenz 2) ausweicht (Bild 67).

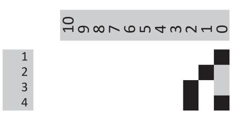


Bild 68

Jetzt erst kann der äußere Ast auf dieser Ebene bleiben und nach unten weiterwachsen, denn nun hat auf der Nulllinie eine neue Astwurzel Platz, ohne irgendwo den äußeren Ast zu berühren (Bild 68).

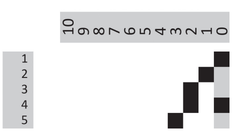


Bild 69

Der neue Ast will nun von der Nulllinie aus weiterwachsen, scheitert aber an der Hürde des Mindestabstands. Also ist sein Wachstum bereits beendet und es ist wieder der äußere Ast an der Reihe zu wachsen – er tut dies auf einer neuen Ebene mit der Potenz 3 (Bild 69).

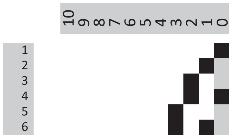


BILD 70

Von dort aus kann er wieder gerade nach unten wachsen, da unterhalb von ihm genügend Platz für einen neuen Trieb vorhanden ist (BILD 70). Allerdings beginnt dessen Wachstum diesmal nicht auf der Nulllinie sondern bereits eine Ebene höher. Der Grund für diese »Zusatz-Regel« ist noch nicht sichtbar und wir lassen unser Pflänzchen vorerst ein paar weitere Schritte wachsen – vielleicht wächst damit auch unsere Erkenntnis.

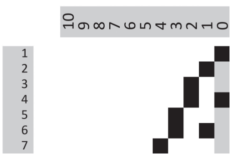


BILD 71

In BILD 71 sehen wir, dass der äußere Ast bereits wieder eine neue Ebene erklommen hat (auf der Potenzlinie 4), da unterhalb von ihm das neue Ästchen nicht mehr weiterwachsen konnte.

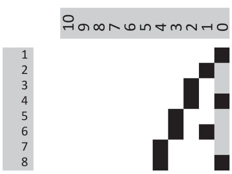


BILD 72

Erst in BILD 72 kann wieder ein neuer Trieb zu wachsen beginnen, ohne dass er einen anderen Ast berührt. Diesmal treibt er wieder direkt auf der Nulllinie aus –

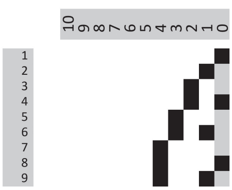


BILD 73

und findet endlich auch Platz für weiteres Wachstum unterhalb des Außenastes, ohne diesen zu berühren. Dieser kann daher auf seiner Linie bleiben und geradeaus nach unten weiterwachsen (BILD 73).

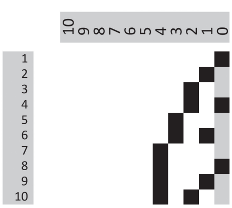


BILD 74

Das neue Ästchen findet ebenfalls Platz für weiteres Wachstum, allerdings auf der nächsthöheren Ebene, während der Außenast seine Reise nach unten immer noch geradlinig fortsetzen kann. Es findet nach wie vor keine Berührung zwischen den Ästen statt (BILD 74).

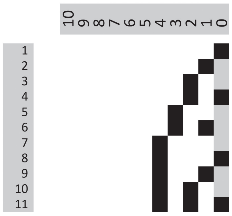


Bild 75

In der weiteren Folge kann dann sogar der innere Ast zum ersten Mal nicht nach außen sondern nach unten hin weiterwachsen, da unterhalb von ihm auf der Nulllinie die Wurzel eines dritten Astes Platz findet, ohne ihn zu berühren (Bild 75). Wir sehen nun, dass die Potenzen 4, 2 und 0 alle besetzt sind und daher im nächsten Schritt der äußere Ast auf der nächsten Ebene (Ebene 5) weiterwachsen muss.

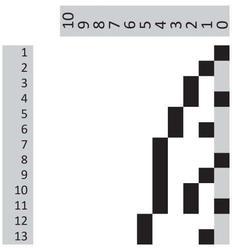


Bild 76

Mit Bild 76 überspringe ich einen Wachstumsschritt und wir sehen in der Zeile 13, dass dort der nächste »neue« Ast auf der Potenzebene 1 eine Wurzel bildet und nicht auf der Nulllinie. Hier tritt also offensichtlich zum zweiten Mal die »Zusatz-Regel« in Kraft, die wir erstmals in Bild 70 auf der Zeile mit der Zahl 6 beobachten konnten.

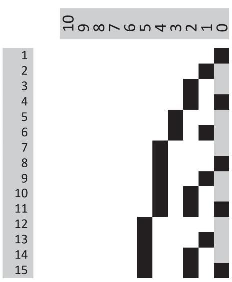


Bild 77

Die nächsten beiden Schritte sind ziemlich offensichtlich – der äußere Ast wächst weiter nach unten, der innere Ast treibt zunächst in Zeile 14 auf eine höhere Ebene (Ebene 2) aus und danach bildet sich auf Zeile 15 ein neuer Trieb auf der Nulllinie (Bild 77).

Die weitere Entwicklung unseres Musters ist nun bereits absehbar. Einzig den Grund für die »Zusatz-Regel« haben wir noch nicht genau verstanden.

Wenn wir ausschließen wollen, dass diese Regel irgendetwas mit der Länge der »Ast-Teilstücke« zu tun hat, sondern dass der Grund einzig in der *Verdrängung* von innen nach außen unter Einhaltung eines Mindestabstands von 1 zu finden ist, dann haben wir offensichtlich noch etwas übersehen.

|» Die Innenseite! Wir haben die Innenseite bisher noch nicht berücksichtigt! Schau dir die Positionen an, an welcher die »Fächer« zu wachsen beginnen. Am besten markierst du sie mit einem weißen Punkt.

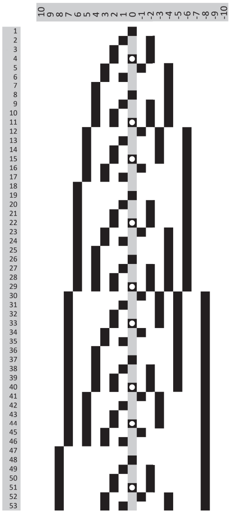


Bild 78

«| Erledigt! (Bild 78).

|» Bist du sicher, dass du wirklich *alle* Fächerwurzeln eingezeichnet hast?

«| Wenn du eine Frage auf diese Weise stellst, dann werde ich unsicher ... Meinst du, ich habe irgendeine Wurzel übersehen?

|» Ich denke schon. Meiner Ansicht nach solltest du *alle Punkte auf der Nulllinie* markieren, denn sie stellen alle eine Fächerwurzel dar. Auf der Nulllinie scheinen die *Gesetze des Ursprung* zu gelten. Dort – und nur dort – können sich die beiden Seiten problemlos überlagern.

Und tatsächlich scheint bei unserem »Phi-Muster« *jeder* Punkt auf der Nulllinie eine Überlagerung von Ast- und Fächerwurzel zu sein. Gehen wir die Punkte, die auf der Nulllinie liegen, einzeln durch und schauen wir, ob sie die Kriterien sowohl für die Außen- als auch für die Innenseite erfüllen.

«| Ich beginne mit der Zahl 1. Deren einziger Punkt bildet zweifellos die Wurzel für den gesamten äußeren Ast (der sich übrigens bis ins Unendliche erstreckt). Gleichzeitig ist der Punkt aber wohl auch das kleinste Teilstück der Hülle auf der Innenseite (siehe Bild 63, Seite 182).

Der nächste Punkt auf der Nulllinie ist der Zahl 4 zugeordnet. Er ist bereits mit einem weißen Punkt gekennzeichnet und erfüllt die Kriterien für eine Astwurzel (siehe Bild 68, Seite 185), so wie er auch eindeutig die Wurzel eines Fächers ist.

Der der Zahl 8 zugeordnete Null-Punkt ist wieder eindeutig die Wurzel eines Astes. Gleichzeitig spricht aber auch nichts dagegen, dass er die Wurzel eines Fächers darstellt, der nur einen einzigen Zweig ausgebildet hat (den auf der Nulllinie). Einen weiteren Zweig kann er nicht bilden, da ein solcher bereits den Nachbar-Fächer berühren würde (auf Zeile 9, Potenz –2). Fächer verzweigen sich ab ihrer Wurzel grundsätzlich zuerst nach unten, dann nach oben, und so weiter.

Wenn wir die Innenseite von der Zahl 1 ausgehend über 2, 3, 4, usw. abschreiten, so können wir im Gegensatz zu den Ästen auf der Außenseite nicht immer sofort angeben, wie weit ein Fächer an einer bestimmten Stelle nach rechts wachsen kann. Wenn wir am Nullpunkt der Zahl 8 angelangt sind, wissen wir noch nichts von der Existenz des nächsten Fächers, der seinen Ursprung am Nullpunkt der Zahl 11 hat, obwohl wir bereits ab der Zeile 5 seinem äußeren Zweig begegnet sind. Auf der Innenseite können wir also nicht erwarten, in gleicher Weise wie die Äste Schritt für Schritt unsere Fächer zu finden.

Es gibt jedoch eine andere Methode, wie wir unsere Fächer eindeutig finden können, wenn wir von 1 beginnend die Zeilen nach unten hin erkunden. Wir gehen für diesen Zweck immer von der Außenhülle nach innen und nehmen also den umgekehrten Weg. Denn wie schon gesagt erscheint der äußere Zweig des Fächers mit der Wurzel 11 zum ersten Mal bereits mit der Zahl 5. Wir *wissen* bei der Zahl 5 bereits, dass dort eine neue Hüllenlinie beginnen muss, und wir wissen auch, *wo* (bei welcher negativen Potenz) sie beginnen muss. Denn die äußeren Zweige sämtlicher Fächer gehorchen genauso der Regel des Mindestabstands von 1 zum nächsten Fächer. Fächer dürfen sich also genausowenig berühren wie Äste und müssen gleichzeitig so dicht wie möglich zusammengerückt sein.

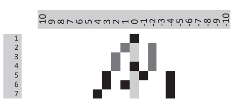


Bild 79

Der äußere Zweig des Fächers Nr. 4 (damit meine ich denjenigen, der seine Wurzel in der Zeile 4 hat), beginnt also bereits in Zeile 2 mit der Potenz –2. Die Länge des Zweiges entspricht genau der Summe der beiden gegenüberliegenden Astglieder auf der Außenseite (Bild 79 mittelgrau).

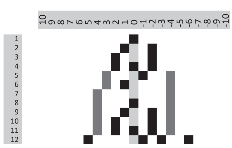


Bild 80

In Bild 80 ist das Außenglied des nächsten Fächers zu sehen, gegenüberliegend die seine Länge bestimmenden zwei Glieder des Außenastes. Die Fächerzweige lassen sich also ziemlich einfach als die jeweiligen Summen der beiden genau gegenüberliegenden Astglieder bestimmen.

Das gilt auch für alle weiter innen liegenden Fächerzweige. Gezeigt werden soll dies anhand von Bild 81, das einen Abschnitt unseres Phi-Musters von Zeile 29 bis Zeile 77 zeigt.

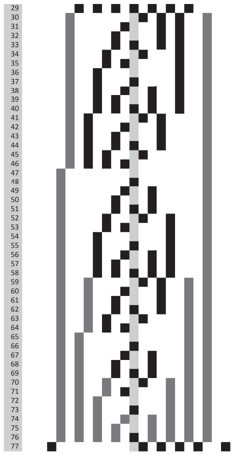


Bild 81

Auf diese Weise können wir also alle Zweige bestimmen, die in einem Fächer *nach oben* streben.

|» Was ist mit den Zweigen, die nach unten streben? Diese können wir nicht so ohne weiteres auf die gleiche Weise bestimmen.

«| Du hast recht. Hier müssen wir ein wenig anders vorgehen. Um das zu demonstrieren, habe ich den Ausschnitt zwischen Zeile 76 und Zeile 123 vorbereitet und dort auf der Außenseite die beiden längeren Astteile und auf der Innenseite den längeren der Fächerzweige, die nach unten weisen, mittelgrau markiert (Bild 82).

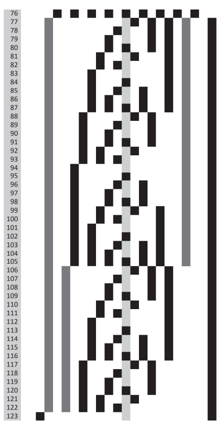


Bild 82

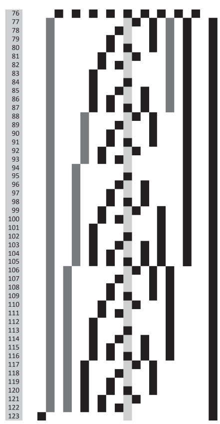


Bild 83

Wir sehen sofort, dass die Länge des Fächerzweigs der *Differenz*-Länge der beiden Ast-Teilstücke entspricht. Um die Länge des nächst-inneren Fächerzweigs bestimmen zu können, müssen wir auch noch die beiden nächsten Ast-Teilstücke von der Länge des äußeren Astteiles abziehen (Bild 83).

Wir sehen somit eine grundsätzliche Methode, wie wir die Längen sämtlicher Äste und Zweige bestimmen können, ohne irgendwelche Zahlen zum Abzählen zu Hilfe nehmen zu müssen.

Ich überlasse es dem Leser, weitere »Arten« dieser Zusammenhänge herauszufinden – es gibt deren noch etliche! Zusammenfassend können wir sagen, dass die Summe der einzelnen Punkte auf der Innenseite stets der Summe der Punkte auf der Außenseite entspricht – mit der Einschränkung, dass wir jeweils am Ende eines Astteiles des Außenastes messen, d.h. innerhalb des Längenbereiches eines Teilastes kann der Wert schwanken, er gleicht sich am Ende des Teilstücks aber immer wieder genau aus. Wir wollen diese Behauptung, die uns nun wieder in die »Welt des Zählens und der Zahlen« führt, überprüfen.

|» Bevor wir in jeder Zeile die einzelnen »Potenzpunkte« abzählen, sollten wir uns darauf einigen, welcher Seite wir die Punkte auf der Nulllinie zuschlagen.

«| Ich denke, wir sollten sie *beiden* Seiten zuschlagen, da wir gesehen haben, dass die Wurzeln auf der Nulllinie sich stets überlappen. (Wir könnten Sie aber genausogut weglassen – es würde keinen Einfluss auf das Ergebnis haben.)

|» Gut, dann erstelle bitte eine Übersichts-Grafik, in welche du die Summe der Punkte für jede Zeile einträgst – getrennt für die Außen- und die Innenseite.

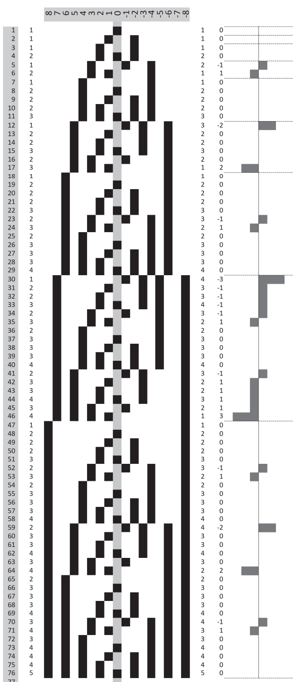


Bild 84

«| Du bekommst nicht nur das, ich habe in Bild 84 die Abweichungen auch in grafischer Form eingetragen. Dabei habe ich mich auf die Werte für die Zeilen 1 bis 76 beschränkt. Die einzelnen Abschnitte des Außenastes habe ich rechts mit horizontalen, gestrichelten Linien markiert. Links, innerhalb der Zeilennummern, ist die Anzahl der Punkte für die Außenseite eingetragen, unmittelbar rechts von der Grafik die Anzahl der Punkte für der Innenseite. Punkte, die auf der Nulllinie liegen, werden sowohl für die Zählung der Außen- als auch der Innenseite verwendet. Die Zahlenkolonne rechts außen enthält die Differenz zwischen der Anzahl auf der Außen- und der Anzahl auf der Innenseite. Diese Differenzwerte sind in grafischer Form ganz rechts als graue Balken eingezeichnet. Wir sehen somit, dass auf jedem Außenastabschnitt die Differenzwerte symmetrisch angeordnet sind, wobei sich die positiven und die negativen Differenzen jeweils genau ausgleichen. Bild 85 und Bild 86 zeigen drei weitere Abschnitte des Außenastes. Das Prinzip, wie sich die Symmetrie noch weiter fortsetzt, kann man sich gut vorstellen.

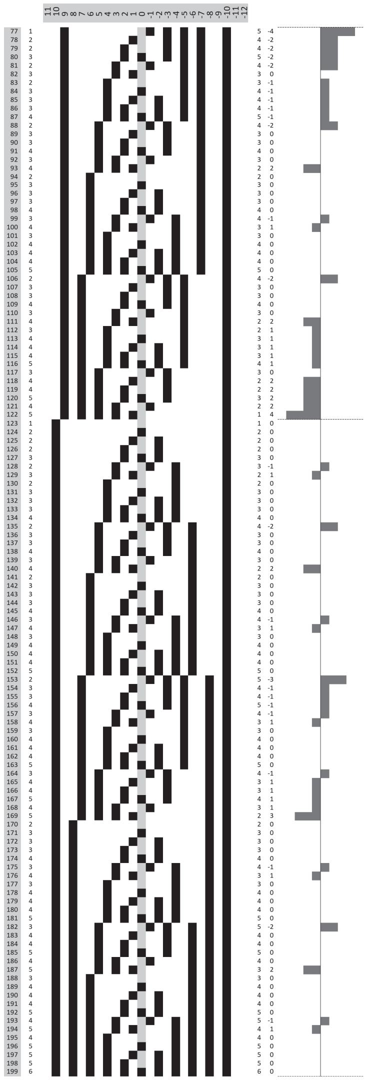


Bild 85

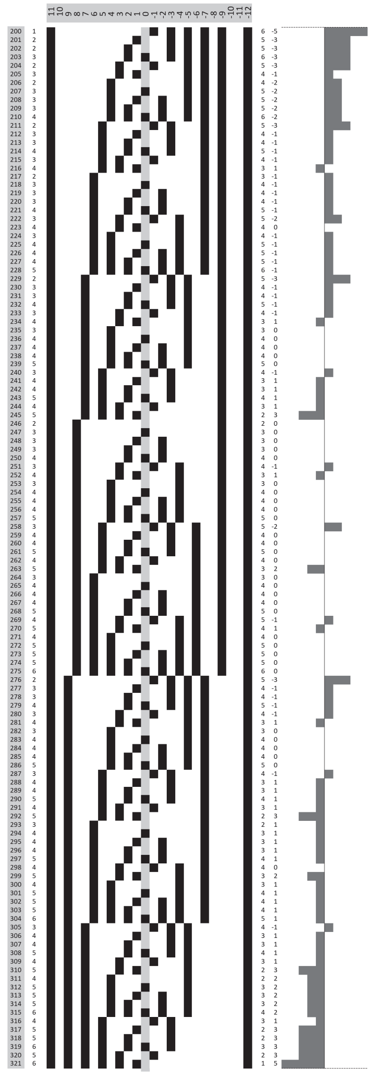


Bild 86

Symmetrie ist jedenfalls ein wichtiges Kennzeichen unseres gesamten, bis ins Unendliche reichenden Musters.

Logik

Bild 87

Gregor Reisch: TYPUS ARITHMETICAE, in »Margarita Philosophica«, Freiburg, 1503

Der Holzschnitt zeigt links *Boëthius*[1], rechts *Pythagoras*[2], hinten *»Arithmetica«*. Das Bild ist der weltweit ersten Enzyklopädie *»Margarita Philosophica«* entnommen.

1 Anicius Manlius Severinus Boëthius: https://de.wikipedia.org/wiki/Boethius

2 Pythagoras von Samos: https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

Vor einigen Tagen (im August 2018) habe ich in der Online-Enzyklopädie »Wikipedia« den Artikel mit dem Stichwort »Logik«[1] gelesen. Ich gebe hier die ersten beiden Absätze wieder – mehr möchte ich dem Leser nicht zumuten:

> Mit **Logik** (von altgriechisch λογικὴ τέχνη logiké téchnē ‚denkende Kunst', ‚Vorgehensweise') oder auch **Folgerichtigkeit** wird im Allgemeinen das vernünftige Schlussfolgern und im Besonderen dessen Lehre – die **Schlussfolgerungslehre** oder auch **Denklehre** – bezeichnet. In der Logik wird die Struktur von Argumenten im Hinblick auf ihre Gültigkeit untersucht, unabhängig vom Inhalt der Aussagen. Bereits in diesem Sinne spricht man auch von „formaler" Logik. Traditionell ist die Logik ein Teil der Philosophie. Ursprünglich hat sich die traditionelle Logik in Nachbarschaft zur Rhetorik entwickelt. Seit dem 20. Jahrhundert versteht man unter Logik überwiegend symbolische Logik, die auch als grundlegende Strukturwissenschaft, z. B. innerhalb der Mathematik und der theoretischen Informatik, behandelt wird.
>
> Die moderne symbolische Logik verwendet statt der natürlichen Sprache eine künstliche Sprache (Ein Satz wie *Der Apfel ist rot* wird z. B. in der Prädikatenlogik als $f(a)$ formalisiert, wobei a für *Der Apfel* und f für *ist rot* steht) und verwendet streng definierte Schlussregeln. Ein einfaches Beispiel für ein solches formales System ist die Aussagenlogik (dabei werden sogenannte atomare Aussagen durch Buchstaben ersetzt). Die symbolische Logik nennt man auch mathematische Logik oder formale Logik im engeren Sinn.

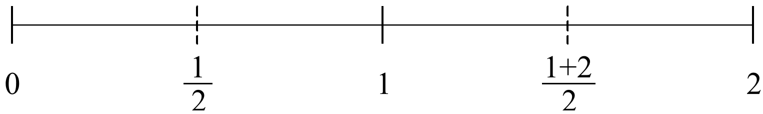
Nun, diesen beiden Absätzen folgen im Artikel noch *viele* weitere, sowie eine *Flut* an weiterführenden Links. Wie es sich für ein Nachschlagewerk gehört. Eine Flut bringt jedoch auch eine Gefahr mit sich: Man kann darin ertrinken.

Ich bevorzuge das schluckweise Trinken. Auf meine eigene Art und Weise.

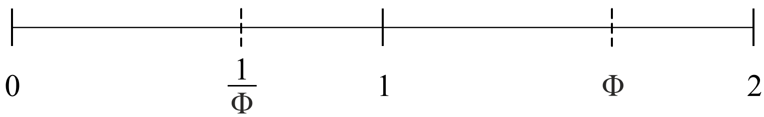
Mir ist bewusst, dass alles, was ich über Logik weiß, von anderen stammt. Nichts davon ist ursprünglich von mir. Das meiste habe ich in der Schule gelernt, vieles von meinen Eltern, mehr noch aus Büchern (jenen aus Papier und jenen, die man auf »Displays« lesen kann), manches von Freunden.

1 https://de.wikipedia.org/wiki/Logik

Logik ist der Kern allen Denkens. Aber nicht der Kern allen Seins.
Die Mitte zwischen 0 und 1 ist die gleiche Mitte wie jene zwischen 1 und 2.

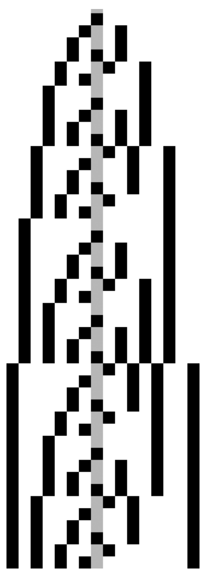


Der Abstand zwischen den beiden Mitten ist genau 1.

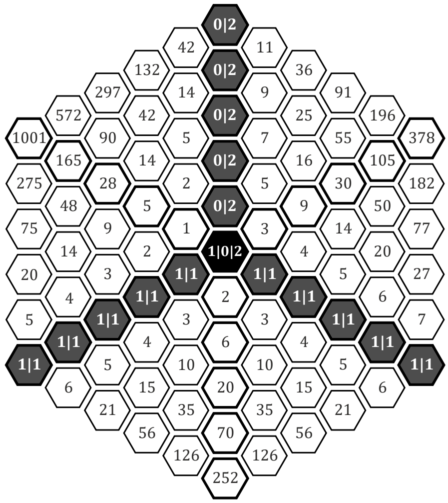


Stimmt's?

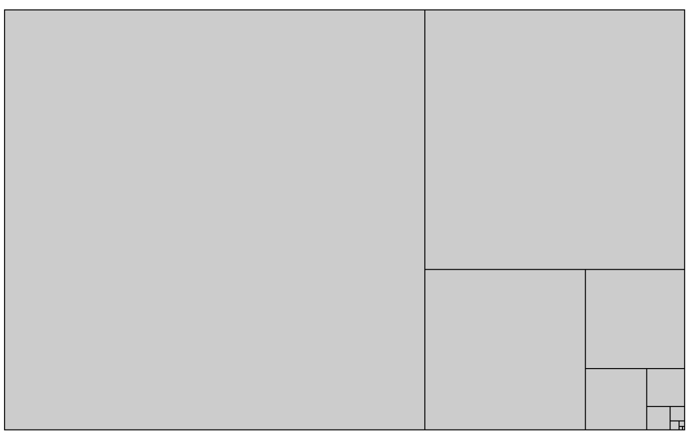
Der Abstand zwischen *allen* Ästen und Zweigen ist immer genau 1.



Der Ursprung liegt im Dunkeln. In einem schwarzen Loch.

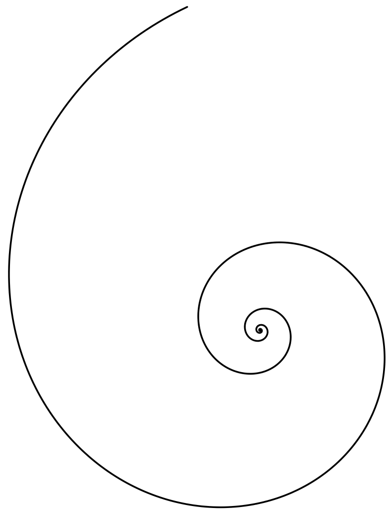


Er ist genauso weit entfernt wie die Unendlichkeit.

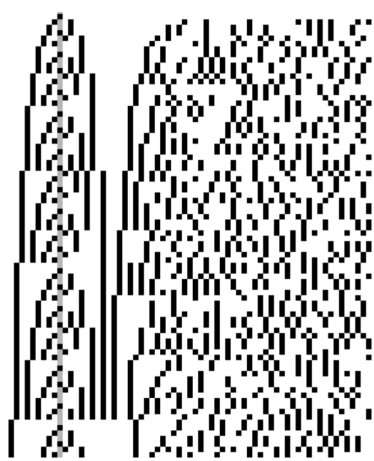


Immer genau einen Schritt.

Egal, wie weit du dich entfernst oder wie nah du herantrittst –
die Form ändert sich nicht.

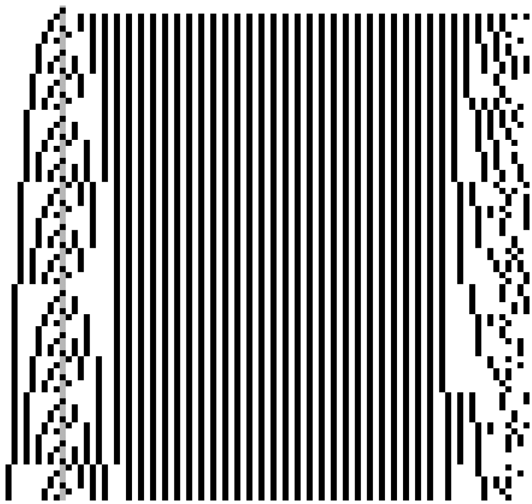


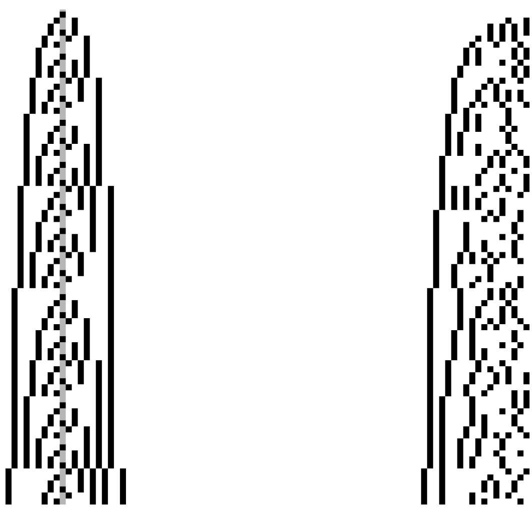
Erst wenn du genügend tief hineinblickst,
beginnst du den fehlenden Teil der Form zu erkennen, ...



... jenen Teil auf der »anderen Seite«, der gewöhnlich »verschleiert« ist.

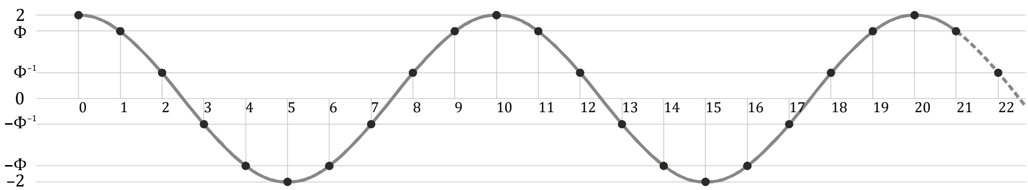
Beim Blick ins Zentrum, genau in die *Mitte*,
beginnt es vor deinen Augen zu flimmern.
Einmal pechschwarz und gleich darauf wieder weiß.





Die Grenzlinie ist schmal. Sehr schmal!

Und wenn du abwechselnd dazunimmst und wegnimmst,
bleibt eine Welle zurück. Die Form des »Randes«.



»Außen« scheint alles klar und logisch. Voller »natürlicher« Zahlen.

(0), 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Und die Mitte zwischen 1 und 2 ist genau 1,5. So ist das in der »linearen Welt«.

In einer multidimensionalen Welt ist die Mitte mehrfach. Nicht berechenbar. Ihre Zahl ist »irrational«. Sogar für Mathematiker. Die Mitte ist mal links und mal rechts. *Bleib nicht stehen, Radfahrer – fall nicht um!* In der Mitte verschwimmen Schwarz und Weiß. Ob 0 oder 1 oder 2 – alle stehen sie am gleichen, unscharfen Fleck. Von vorne betrachtet siehst du eine 0. Von links eine 1. Von rechts eine 2. Und von oben betrachtet ist es Φ. Vielleicht.

Logik. Sie kann sich nicht selbst erklären. »Folgerichtiges Denken« braucht einen Ursprung. Es braucht etwas, dem es folgen kann.

Doch das ist manchmal schwarz. Und manchmal ist es weiß. Und manchmal ist es schwarz oder weiß. Oder schwarz und weiß. Oder weder schwarz noch weiß.

Technik. Aufbauend auf Naturwissenschaften – auf Chemie, Physik. Aufbauend auf Mathematik. Und wiederum aufbauend auf Logik. Und wiederum aufbauend auf ... ???

Auf Fragen.

Das Grundlegende kann nicht erklärt werden.

Woher kommt das Universum?
Wann begann die Zeit?
Wer bin ich?

Ein Lichtteilchen kann man nicht sehen. Zum Sehen braucht man Licht.
Wo im Universum ist oben? Wo immer du willst.

Wer hat recht? Du. Ich. Jeder. Niemand. Logik braucht einen Ursprung. Zeige ihn mir! – Er befindet sich mitten im schwarzen Loch! In der Mitte des Zentrums.

Naturwissenschaft. Beobachten, messen, analysieren.

Naturwissenschaftler, Physiker, haben längst gesehen, dass sie den Kern nicht sehen können. Er verschwimmt vor ihren Augen. Niemand von ihnen hat je ein Elementarteilchen zu sehen bekommen. Sie sehen nur deren Spuren.

Energie ist Masse, multipliziert mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit.

$$E = mc^2$$

Und was ist Masse? Eine Eigenschaft der Materie. Aha!

Geist (Denken) hat sich aus der Materie heraus entwickelt. Nimmt die Naturwissenschaft an. Materie *ist* Geist, sagen andere. Schwarz oder weiß.

Logik. Sie ist die Domäne des Verstandes, des Hüters der »Wahrheit«. Die eine Illusion ist. Der Verstand lebt in der Außenwelt. Die in Wahrheit eine Höhle ist. Platons Höhle. Diese ist seine Heimat. Und sein Gefängnis. Das sicherste Gefängnis, das je gebaut wurde, ist der Verstand.

Gedanken sind keine Form von Energie. Sagt die Naturwissenschaft. Denn Energie kann man messen. Die Energie von Gedanken jedoch kann man nicht messen. Sie haben keine Masse. Ergo haben sie keine Energie. Was ich nicht messen kann, existiert nicht.

Die Energie, die heute, 2018, von Staaten aufgewendet wird, um »sich zu verteidigen«, ist immens. Abermillionen Waffen werden produziert, um »sich zu verteidigen«. Ein Befehl ist das Ergebnis eines einzigen Gedankens. Ja oder nein. Inmitten von Abermilliarden anderer Gedanken. Ja oder nein. Logik in ihrer minimalsten Form. Schwarz oder Weiß. 1 oder 0. Den roten Knopf drücken oder nicht.

Wenn ein Gedanke keine Energie hat, warum kannst du ihn dann nicht einfach wegwerfen? Geh nach Hause, Soldat! Nimm an der 100. Stelle nach dem Komma diese eine kleine Ziffer weg, und es herrscht Frieden. Nichts ist plötzlich mehr schwarz, alles ist weiß. Soviel Energie wird frei! Mit so wenig Aufwand.

Der Ursprung eines Gedankens. Ihn herauszufinden ist nicht möglich. Jeder Gedanke baut auf einem anderen auf. Jede Entscheidung (ja oder nein?) beruht auf den Ergebnissen vorangegangener Entscheidungen. Sagt die Logik.

Im Kern, im Innersten regiert Väterchen Zufall. Er kennt keine Ursachen. Er enthält *alle Möglichkeiten*. Sie sind sein Geschenk für dich. Dort, wo alles eins ist, nehmen die Punkte *irgendwo* Platz. Verwirklichung ist ganzzahlig. *Natürlich*. Abzählbar in natürlichen Zahlen. Diesseits des Schleiers.

Jenseits ist es schwarz. Oder weiß. Oder beides gleichzeitig. Oder weder noch. Unlogisch. Irrational.

Natur ist, was wir sehen können. Was wir hören können. Was wir ertasten und schmecken und riechen können. Und was wir zählen und messen und klassifizieren und einordnen können. So die Naturwissenschaft. Was wir deuten können. So die Philosophie.

Zeit ist, was die Uhr anzeigt. Sagte Einstein. So habe ich es gelesen. Zeit ist die Krümmung des Raumes. So habe ich es ebenfalls gelesen. Unsere Körper existieren immer genau zwischen Vergangenheit und Zukunft. Jetzt. Exakt in der Mitte. Materie kann diese Mitte nicht verlassen. Gedanken können es. Doch Gedanken sind nicht »materiell«. Sie sind masselos. Und daher energielos. »Denkt« die Naturwissenschaft. Glücklicherweise drückt sie nicht auf den Knopf.

Licht besteht aus »Teilchen«. Sagt die Physik. Und weist es nach.
Licht ist eine »Welle«. Sagt die Physik. Und weist es nach. 1 = 0 = 2.

Logik siedelt ganz am rechten Rand. Im Herrschaftsbereich der 2. Im Dualen. Dort, wo die schwarzen Punkte so dicht zusammengerückt sind, dass nichts anderes mehr Platz zwischen ihnen findet. Der Abstand ist auf 0 geschrumpft. Nur noch ja oder nein bleiben übrig. 1 oder 0.

Ganz am linken Rand fliehen die schwarzen Punkte voreinander. So weit sie nur können. Um am Ende *irgendwo* zu landen. Oder auf einem einzigen, zusammengeballten Klumpen. Manifest. Am linken Rand ist »alles Eins«.

In der Mitte ist alles so weit zusammengerückt, dass überall nur noch genau EIN Abstand herrscht. So nah wie möglich, dennoch nirgendwo sich berührend. Schwarz und weiß gleichzeitig.

Es ist nicht möglich zu sagen, welcher Zustand *genau* in der Mitte des Zentrums herrscht. Denn des Messers Schneide ist unendlich dünn. So dünn, dass darin ein ganzes Universum Platz findet.

Nachwort

Ich habe gleich am Anfang dieses Buches, im Vorwort, davon gesprochen, dass Mathematiker nicht zur Zielgruppe meiner Leser gehören. Mathematiker verwenden und sprechen eine hochspezialisierte »Sprache«, die nur sie selbst verstehen und kaum jemand sonst (allenfalls noch Physiker und Ingenieure, denn diese sind in besonders hohem Maße auf die Mathematik angewiesen). Auch andere Berufsgruppen verwenden »Sprachen«, die weitgehend nur sie selber verstehen: Juristen, Ingenieure, Informatiker, Chemiker, Ärzte, ...

In der Mathematik scheint das »Gefälle« der Verständlichkeit zwischen ihnen selbst und dem Rest der Welt besonders hoch. Schon in der schulischen Ausbildung ist das zu erkennen. Nicht zufällig gilt Mathematik als »Angstfach« im Unterricht. Mich hat das immer sehr gestört. Als Ingenieur und Informatiker bin ich mit »angewandter Mathematik« ziemlich vertraut, aber »echte Fachbücher« über Mathematik fordern mich heraus – und stoßen mich ab. Denn ich habe festgestellt, dass dadurch vieles in einer »Wolke des Abstrakten« vorüberweht, wo es doch Wissen und Verstehen herabregnen sollte.

Höchstwahrscheinlich bin ich »zu wenig begabt«, um »wirklich mathematische Texte« verstehen zu können. Aber ich habe den leisen Verdacht, dass eine kleine Gruppe von Menschen es geradezu darauf anlegt, vom Rest der Menschheit nicht verstanden zu werden. Ich stehe dann vor diesen Leuten und sehe sie, wie sie sich hinter ihrer selbstgeschaffenen »Wolke des Abstrakten« verstecken. Diese Art von Wolken soll möglichst hoch oben am Himmel schweben. Dadurch bekommt der ganz gewöhnlich am Boden lebende Mensch das Gefühl, ein Zwerg zu sein oder einen Riesen vor sich zu haben, da dessen Kopf so hoch oben ist ...

Unverständlichkeit als »Qualitätsmerkmal« – dieser Eindruck drängt sich mir manchmal auf, wenn ich Texte lese wie den folgenden, den ich »aus dem Internet kopiert« habe und der als Beispiel dienen möge, was ich damit meine:

2.6 Die Fibonacci-Zahlen als diophantische Menge

In der Theorie der diophantischen Gleichungen beschäftigt man sich mit der Frage, ob eine Gleichung der Form $P(x_1, \ldots, x_n)=0$, wo P ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, Lösungen in den ganzen (oder natürlichen) Zahlen hat. Berühmtestes Beispiel ist sicherlich der Große Satz von Fermat. Die Frage nach der Lösbarkeit ist im Allgemeinen sehr schwer zu beantworten.

Umgekehrt kann man sich auch fragen, ob es zu einer vorgegebenen Teilmenge A von IN ein Polynom *P* gibt, sodass die Elemente aus A genau die (ganzen oder natürlichen) Nullstellen von *P* sind. Etwas präziser definieren wir:

2.6.27 Definition:

Eine Teilmenge A von IN heißt »diophantisch«, falls ein Polynom *P* in $k+n$ Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten existiert, sodass

$$(a_1, \ldots, a_k) \in A^k \Leftrightarrow \exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n : P(a_1, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_n)=0 .$$

Interessant ist diese Eigenschaft natürlich nur für unendliche Mengen *A*.

2.6.28 Beispiel:

Die Menge der durch *p* teilbaren Zahlen ist diophantisch, sie ist nämlich genau gegeben durch

$$\{a \in \mathbb{N} | \exists x \in \mathbb{N} : a - px = 0\}.$$

Wir werden in diesem Abschnitt die Frage behandeln, ob die Menge *F* der Fibonacci-Zahlen und ihr Komplement IN-F diophantisch sind. Und zwar betrachten wir das **»Lucas-Polynom«**

$$L(x, y) = x^2 - xy - y^2 .$$

Nun gilt die dazu sehr ähnliche Identität $F_{n+1}^2 - F_{n-1} F_n - F_n^2$. In [Jones1] wird gezeigt:

$$L(x, y) = \quad 1 \Leftrightarrow y = F_{2n} \quad \text{und } x = F_{2n+1}$$
$$L(x, y) = -1 \Leftrightarrow y = F_{2n-1} \text{ und } x = F_{2n}$$

Also:

$$x \in F \Leftrightarrow \exists\, y \in \mathbb{N} : L(y, x) \in \{\pm 1\}.$$

Damit haben wir schon einmal das Polynom für die Fibonacci-Zahlen. Jede Nicht-Fibonacci-Zahl liegt zwischen zwei Fibonacci-Zahlen:

$$z \notin F \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{N} : L(x, y) \in \{\pm 1\} \text{ und } (x - z)(z - y) > 0.$$

Wir bekommen:

2.6.29 Proposition:

Die Mengen F und IN-F sind diophantisch. Und zwar gilt:

$$F = \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists\, y ; L(x, y)^2 - 1 = 0 \},$$
$$\mathbb{N} - F = \{ z \in \mathbb{N} \mid \exists\, x, y, v \in \mathbb{N} : (L(x, y)^2 - 1)^2 + ((x - z)(z - y) - v - 1)^2 = 0 \}.$$

nach [Jones2].

Unverständlichkeit ist das abschreckendste Merkmal in unseren Schulen. Der Druck, dieses *tatsächlich* unverständliche Zeug verstehen zu *müssen*, hat eine zerstörende Wirkung auf das Wohlbefinden eines jungen Menschen. Wir müssen nicht alle Mathematiker sein. Im alltäglichen Leben von »Otto Normalo« reicht es im Allgemeinen aus, die Grundrechnungsarten zu beherrschen. Allenfalls weiß er noch, was ein Quadrat und eine Kubikzahl ist. Dann ist bereits das Ende der Fahnenstange erreicht. Ingenieure brauchen(!) zweifellos sehr viel mehr Mathematik. Physiker ebenfalls. Außerhalb dieser beiden Berufsgruppen weist das mathematische Gelände jedoch bereits ein Gefälle auf.

In der Welt des 21. Jahrhunderts, in welcher Computer einen zunehmend größer werdenden Teil des täglichen Geschehens beeinflussen oder sogar direkt steuern, ist es wichtig geworden, den »Druck des Unverständlichen« herauszunehmen. Und umgekehrt: Dass das Gleichgewicht zwischen Intellekt und Intuition gefördert wird! Intellekt alleine ist *tödlich*. Unsere Schulen und erst recht unsere Universitäten kennen *ausschließlich* den Intellekt. An keiner »offiziellen Schule« dieses Planeten wird gelehrt, uns mit der »anderen Seite« zu verbinden. Das fällt in den Bereich der »Esoterik« und ist an einer Universität ungefähr das Gleiche wie der Teufel in einer Kirche. Die Rolle, die im Mittelalter die Kirche hatte, nämlich vorzugeben, wie und was man denken sollte, spielen heute die Universitäten. Einzig und wirklich ausschließlich dem Verstand wird gehuldigt: Leben ist ein chemischer Prozess! Punkt. Selbst Psychologen wissen nicht, was die Seele ist.[1] Seelische Probleme werden mit Chemie behandelt – die moderne Form von Teufelsaustreibung.

Unser linear denkender Verstand (ein Gedanke nach dem anderen, einer baut auf dem anderen auf) ist einfach nicht in der Lage, etwas wahrzunehmen oder gar zu verarbeiten, das multidimensional ist. Das Universum jedoch ist multidimensional! Wir selber sind multidimensionale Wesen! Wir sind es von Anfang an gewesen, haben uns jedoch ganz extrem »auseinandergelebt« in Gruppen, die einseitig nur den logischen Verstand verwenden (Mathematiker sind hier naturgemäß besonders gefährdet) und »Esoteriker«, die sich am liebsten nur in den Gefilden »jenseits des Schleiers« aufhalten würden. Unser gesamtes Wesen jedoch ist beides! Mathematiker, Physiker, Ärzte ..., euch sei gesagt, dass Logik nur eine Seite der Wirklichkeit ist. Die Unschärferelation gilt überall im Universum! Sie ist ein alles durchdringendes Grundprinzip. Im Kleinen und ebenso im Großen. Wir betrachten unsere Welt immer noch nahezu ausschließlich »linear«: Erst kommt die Vergangenheit, dann kommt der jetzige Augenblick, dann kommt die Zukunft. Und vor etwas mehr als 14 Milliarden Jahren gab es einen großen Knall, in dem alles begann. Wann wacht ihr endlich auf, Physiker, aus eurem Alptraum? Sagt mir jetzt bitte nicht, das wären ja alles nur »Theorien«. Denn das ist nicht wahr. Ihr denkt so! Die wirklich Großen unter euch waren allesamt sehr intuitive Menschen. Einstein hätte ohne Intuition unmöglich die Relativitätstheorie und vieles andere entwickeln können. Im Grunde wisst ihr das, liebe Physiker.

1 Psychologie – wörtlich: Seelenkunde

Ihr wisst es! Aber es hat für euch keinerlei physikalische Realität! Ihr klammert es vollkommen aus euren Forschungen aus. Hinter vorgehaltener Hand wird manchmal darüber gesprochen, aber einen Lehrstuhl für die Physik des Lebens sucht man vergeblich. Am ehesten dran, die Nulllinie zu überschreiten, sind noch die Quantenphysiker. Sie wissen, dass hinter der Unschärfe noch etwas ist, das scharf ist. Sie wissen es intuitiv. Aber sie trauen sich nicht, diesen letzten Schritt zu gehen, denn ein Großteil des gesamte Gebäudes, das sie so mühevoll errichtet haben, würde dann einstürzen.

Damals, vor etwa 400 Jahren, hat die Kirche Galileo Galilei und andere verurteilt. Das Große Pendel beginnt jetzt zurückzuschwingen. Heute verurteilt die Wissenschaft alles, was »esoterisch« ist. Nur die Materie gilt als real, alles andere ist eine »geistige Verirrung«. 1 – 0 – 2 ...

Wissenschaftler, du bist ein ganz klein wenig mehr als nur ein Klumpen Materie. Du anerkennst nur das, was du auf der abzählbaren Seite der Wirklichkeit vorfindest. Zwischen zwei ganzen Katzen sitzen noch zwei weitere. Schrödingers Katzen![1] Die eine ist tot, die andere lebendig. Die eine sitzt auf dem Boden, die andere steht auf dem Kopf. Die beiden Katzen heißen

$$\Phi \text{ und } \frac{1}{\Phi}$$

und sitzen so nah beisammen, dass zwischen ihnen genau *eine* unsichtbare Katze Platz findet.

In einer multidimensionalen Welt gibt es kein Ende und keinen Anfang. Es gibt nicht einmal *Erklärungen*! Dort herrscht *Gleichzeitigkeit*! Ich sehe und erfasse etwas unmittelbar, mit einem einzigen Blick! Bei einem Bild klappere ich auch nicht die einzelnen Bildpunkte nacheinander ab und ordne sie in Kategorien, um am Ende dieses Vorgangs zum Schluss zu kommen: Das ist eine Eiche! Computer tun so etwas. Sie *müssen* das, sie können nicht anders. Nicht aber wir. Computer sind »eindimensional«, sie rechnen »linear« – auch wenn heute immer mehr versucht wird, möglichst viele Prozesse parallel zu verarbeiten. Doch der Versuch, Software zu schreiben, die in der Lage ist, viele Dinge *gleichzeitig* zu berechnen, ist

1 Jeder Naturwissenschaftler kennt diese Katzen! :-)

nur der Not entsprungen, dass wir bereits ziemlich am Ende der möglichen Miniaturisierung von Silizium-Chips angelangt sind. Diese überhitzen zu leicht bei hohen Verarbeitungsfrequenzen. Unser Gehirn – besser: unser Verstand – ist zu fest in der »Zeit« verankert. Dennoch haben wir Fähigkeiten, die unser Verstand nicht im Mindesten erklären kann. Oder weiß du etwa, in welcher Reihenfolge du welche Muskeln bewegen musst, um das Gleichgewicht auf einer Slackline[1] zu bewahren? Müsstest du darüber nachdenken, kämst du keinen Meter weit. Deine »andere Hälfte« erledigt das. Sie lässt dich tanzen. Auf dem Seil oder rund um eine Zahl.

Das Kapitel »Logik« (ab Seite 139) habe ich so geschrieben, dass nicht nur deine linke Gehirnhälfte (die »logische Hälfte«) gefordert ist, sondern auch deine rechte, die intuitive. Die Sätze sind sehr knapp gefasst und Bilder dominieren. Du brauchst *beide* Seiten, um verstehen zu können, warum eine Katze gleichzeitig tot und lebendig sein kann. Und warum die eine aufrecht sitzt und die andere auf dem Kopf steht.

1 Ein kräftiges Band, über das man ähnlich wie beim Seiltanzen balanciert.

Danke

sage ich ein paar Menschen, die es mir möglich gemacht haben, ein so »schräges« Buch zu schreiben. Zunächst mal mir selber. (Ja, ich bin ein wahrhaftiger Egoist!) Denn es hat mich ziemlich viel Überwindung gekostet, den Gedanken zur Seite zu schieben, dass sich für eine Gedankenwelt, wie sie hier ausgebreitet wurde, nur 10^{-76} Leser finden werden. Ich habe deshalb auch bereits im Vorwort davor gewarnt ...

Danke sage ich meinen Eltern, meinen Geschwistern, meinen Lehrern. Jenen, die mir die Basis ermöglichten, um sowohl verrückt als auch »gescheit« genug sein zu können, die Illusion der Gegensätze zu erkennen.

Danke den Frauen in meinem Leben – meinen Partnerinnen und Freundinnen. Ihnen verdanke ich »Wärme« und »weibliche Logik«. Nicht von ungefähr ist »die Weisheit« weiblich.

Danke, Brunhilde! Für dein mühevolles Verständnis, dass dein Partner an manchen Tagen (und Nächten) mit seinem Computer verheiratet war.

Danke jenen Freunden, die vor bereits 4 Jahren eine erste Kurzfassung des Buches gelesen und mir Feedback gegeben haben.

Danke der »unsichtbaren Welt jenseits des Schleiers« ... ohne die wir nicht vollständig sind.

Literatur

Erst nachdem der Großteil dieses Buches bereits geschrieben war, fand ich durch »Zufall« beim Stöbern im Internet heraus, dass ich nicht der Erste war, der entdeckt hatte, dass sich *alle* natürlichen Zahlen als einfache Potenzsummen von Φ darstellen lassen. Auf der englischsprachigen Website von WolframAlpha fand ich mithilfe der Suchbegriffe »phi number system« folgenden Eintrag:
http://mathworld.wolfram.com/PhiNumberSystem.html

Ein paar dürre Zeilen, mehr nicht ... Nur Mathematiker verirren sich dorthin.

Ich habe nicht alle hier aufgelisteten Bücher gelesen. Die Auswahl ist angesichts der tatsächlich verfügbaren Bücher und Online-Veröffentlichungen sehr klein. Wenn du dich umfassender informieren willst, empfehle ich die Verwendung einer Internet-Suchmaschine – du wirst überrascht sein, wie unglaublich groß die Vielfalt der Literatur rund um Φ und die eng verwandten Fibonacci-Zahlen ist.

Fernando Corbalán:
Der Goldene Schnitt: Die Mathematische Sprache der Schönheit
Verlag: Librero
ISBN: 978-9089986894

Priya Hemenway:
Der Geheime Code
Verlag Evergreen
ISBN: 978-3836507080

Huberta Lausch:
Fibonacci und die Folge(n)
Verlag Oldenbourg
ISBN: 987-3-486-58910-8

Henrik May:
Die Fibonacci-Zahlen. Über die Fibonaccifolge, den goldenen Schnitt und deren Auftreten in Natur und Wirtschaft
GRIN Verlag
ISBN: 978-3656440482

Hans Walser:
Fibonacci: Zahlen und Figuren
Edition am Gutenbergplatz Leipzig
ISBN: 978-3937219608

Albrecht Beutelspacher:
Der Goldene Schnitt
Spektrum Akademischer Verlag
ISBN: 978-3860254042

Ian Stewart:
Die Zahlen der Natur. Mathematik als Fenster zur Welt
Spektrum Akademischer Verlag
ISBN: 3-8274-0242-5

Oliver Götze:
Göttlich Golden Genial: Weltformel Goldener Schnitt?
Verlag Hirmer
ISBN: 978-3777426891

Axel Hausmann:
Der Goldene Schnitt. Göttliche Proportionen und Noble Zahlen
ISBN 3-8311-2442-6

Gary B. Meisner:
The Golden Ratio: The Divine Beauty of Mathematics (engl.)
Verlag RACE POINT PUB
ISBN: 978-1631064869

Mario Livio:
The Golden Ratio: The Story of PHI, the World‘s Most Astonishing Number (engl.)
Broadway Books
ISBN: 978-0767908160

Sectio Aurea: Der Goldene Schnitt
http://www.sectioaurea.at

Der Goldene Schnitt: Das Mysterium der Schönheit
http://www.golden-section.eu

Den Goldenen Schnitt gibt es auch in der Quantenwelt
http://www.helmholtz-berlin.de/pubbin/news_seite?nid=13051

The Fibonacci Quarterly
Official Publication of The Fibonacci Association
https://www.fq.math.ca